- PROBLEME DE MECANIQUE DU POINT 1 -

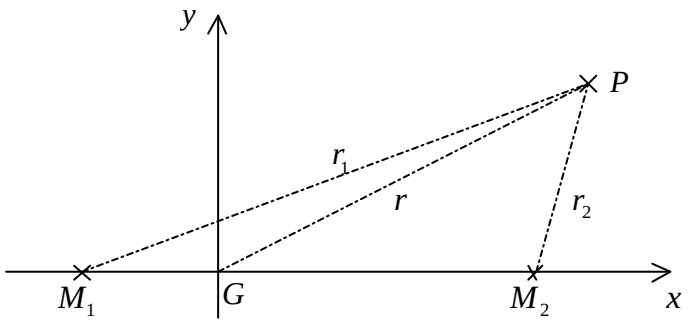
• **ENONCE :** « Points de Lagrange »

Deux points matériels M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2, gravitent à une distance $a = M_1 M_2$ **constante** l'une de l'autre, l'interaction étant purement gravitationnelle ; le système constitué par les deux masses est mécaniquement isolé.

1) Dans le référentiel barycentrique (R^*) du système, déterminer les trajectoires des deux points matériels.

2) Calculer w, vitesse angulaire par rapport à (R^*) d'un repère (R) lié à des axes (Gx,Gy), G étant le centre de masse du système précédent, et Gx étant constamment dirigé de M_1 vers M_2 (de plus, Gy est perpendiculaire à Gx).

3) Un point matériel P, de masse m très inférieure à m_1 et m_2 de façon à ne pas perturber le mouvement de M_1 et M_2, est placé dans le plan Gxy, à l'extérieur de la droite $M_1 M_2$, comme le montre la figure ci-dessous :



Le repérage du point P, dans le référentiel (R), utilisera les **coordonnées bipolaires** r_1 et r_2 .

a) Calculer, en fonction de r_2 et r_1, l'énergie potentielle E_P dont dérivent les forces s'exerçant dans (R) sur la masse m.

b) Montrer que E_P est extrémale en deux points L_4 et L_5 (nommés « points de Lagrange »), symétriques par rapport à la droite $M_1 M_2$.

c) Comment interpréter la présence de nombreux astéroïdes au voisinage des points L_4 et L_5 du couple Soleil-Jupiter (les « grecs » en L_4, en avance sur la trajectoire de Jupiter, et les « troyens » en L_5, en retard par rapport à Jupiter…) ?
Remarque : ce phénomène avait été prédit par Lagrange (1736-1813) en 1772, mais la première planète « troyenne » ne fut observée qu'en 1906, presque 100 ans après la mort de Lagrange !

4) On considère maintenant le couple Soleil-Terre, supposé mécaniquement isolé ; la masse du Soleil est notée M, celle de la Terre vaut mM, avec $m \ll 1$.
On peut alors confondre le centre de masse G du système avec le Soleil (point M_1).

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

a) Représenter l'allure de la fonction $E_P(x)$, où E_P représente l'énergie potentielle, dans le référentiel (R) précédemment défini, d'une masse m placée en un point d'ordonnée nulle et d'abscisse x, comptée le long d'un axe d'origine la Terre (point M_2) et dirigé vers le Soleil.

b) En déduire qu'il existe trois autres points de Lagrange (L_1,L_2 et L_3), où $E_P(x)$ est également extrémale ; compte tenu de l'allure de la courbe, ces points sont-ils des positions d'équilibre stables ?

c) On s'intéresse plus particulièrement à L_1 (entre le Soleil et la Terre), d'abscisse x_1, et à L_2, d'abscisse x_2 négative ; déterminer x_1 et x_2 en fonction de a et m (dans un premier temps, on pourra supposer que x_1 et $|x_2|$ sont très inférieures à a, hypothèse que l'on vérifiera à la fin du calcul).
Comment sont situés L_1 et L_2 par rapport à la Terre ?

d) Application numérique : on donne $a = 1{,}5.10^8\,km$ et $m = 3.10^{-6}$

Calculer x_1 et x_2.

e) Le point L_1 est occupé depuis plusieurs années par le satellite SOHO (Solar And Heliospheric Observatory) : quel est l'intérêt d'un tel positionnement ? Vous paraît-il simple de maintenir un satellite au voisinage de L_1 ?

* * * * * * * * * * * * * * * *

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.