- PROBLEME SUR LES ONDES MECANIQUES 1 -

- **ENONCE :** « Chaîne linéaire d'atomes, avec impureté »

On considère une chaîne linéaire illimitée d'atomes identiques de masse m.
A l'équilibre, ils sont séparés par une distance a, et l'atome n se trouve à une abscisse x_n^0.
Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie suivant l'axe Ox la position de l'atome n d'une quantité $u_n(t) \ll a$, celui-ci est alors soumis à des interactions complexes, modélisées par des forces de rappel de raideur a, limitées entre atomes premiers voisins.

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $u_n(t)$, équation dans laquelle figureront également $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$.

2) On veut montrer qu'il existe des ondes élastiques longitudinales de pulsation w et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$, avec $k \in \mathbb{R}$, qui peuvent se propager sans atténuation le long de la chaîne et qui, en notation complexe, ont la forme :

$$\underline{u}_n(t) = A\exp[i(kx_n^0 - wt)] \qquad A = cste \in \mathbb{R}$$

Trouver la relation que w et k doivent satisfaire (relation de dispersion), et dessiner le graphe $w(ka)$.

3) On note w_M la pulsation maximale des ondes qui peuvent se propager dans la chaîne : à quelle longueur d'onde $l_{\min}$ correspond cette pulsation maximale ? Pour cette même pulsation, comment les atomes oscillent-ils les uns par rapport aux autres ? Que se passerait-il si l'on essayait de propager une perturbation de pulsation supérieure à w_M ?

4) Pour préciser les phénomènes découverts dans la question précédente, calculer les vitesses de phase v_j et de groupe v_g ; en donner les limites lorsque $ka \to 0$ et $ka \to p$.
Faire le lien avec la question précédente.

5) Justifier le fait que pour les faibles valeurs de k, les élongations $u_n(t)$ peuvent être représentées par une fonction quasi-continue $u(x,t)$, où la variable quasi-continue x représente l'emplacement d'un atome au repos.
A partir d'un développement de Taylor au **second ordre**, déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(x,t)$, et en déduire, dans ces conditions, la célérité c de ces ondes ; commenter en liaison avec la question 4).

6) Application numérique :
on donne pour le fer : $a = 2{,}52.10^{-10} m$; $m = 9{,}26.10^{-26} kg$; $a = 49{,}4 N.m^{-1}$.

Calculer $f_M = \dfrac{w_M}{2p}$ et c.
De quel type d'ondes s'agit-il ?

7) Dans le cadre de «l'approximation des milieux continus » précédente, on place une impureté dans la chaîne précédente : en n=0, se trouve un atome de masse $m_0 \neq m$; dans la région des abscisses $x \leq 0$, on considère une onde harmonique de pulsation w et se propageant selon les abscisses croissantes.
Il y a alors apparition d'une onde réfléchie (« écho ») et d'une onde transmise par l'impureté.

a) Donner leur pulsation et leur vecteur d'onde.
b) Donner l'expression de l'onde réfléchie $\underline{u}_n^r(t)$ et de l'onde transmise $\underline{u}_n^t(t)$, si l'on décrit l'onde incidente par $\underline{u}_n^i(t) = A\exp[i(kna - wt)]$; on notera $\underline{r}$ le coefficient de réflexion complexe et $\underline{t}$ le coefficient de transmission complexe.
c) Calculer le coefficient de transmission complexe $\underline{t}$; en déduire son module et son argument.
d) <u>Cas particuliers</u> : étudier les cas $m_0 = m;\ m_0 = 0;\ m_0 \to \infty$ (pour chaque cas particulier, on s'intéressera aux situations où $ka \to 0$ et $ka \to p$; on pourra notamment caractériser le type d'onde apparaissant du côté des abscisses négatives).
Donner des applications du phénomène étudié précédemment.

****