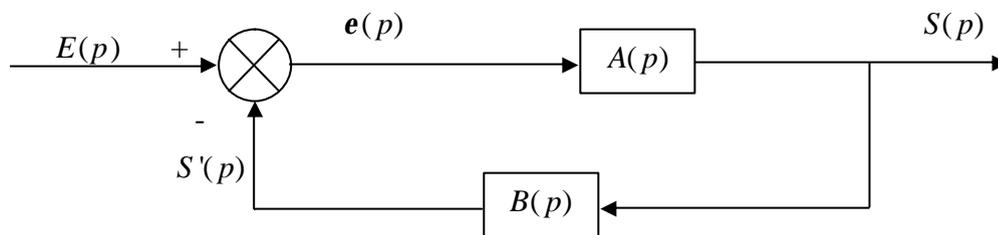


**SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS***ANALYSE FREQUENTIELLE (Partie 1 & 2)*

L'étude détaillée se limite aux systèmes de bases, c'est à dire aux systèmes du premier ordre et du second ordre. En effet l'étude des autres systèmes se construit à partir des résultats issus des premiers et seconds ordres.

1 Généralités - Rappels**1.1 Fonctions de transfert**

Considérons le schéma bloc d'un asservissement :



Définition des fonctions sur le schéma bloc usuel :

$E(p)$ est l'entrée du système ou encore la consigne donnée au système.

$S(p)$ est la sortie du système ou encore la réponse système.

$S'(p)$ est l'image de la sortie.

$e(p)$ est l'erreur (ou écart) constatée entre l'entrée $E(p)$ et l'image de la sortie $S'(p)$.

Définition de la FTBF et de la FTBO :

- Fonction de Transfert en Boucle Fermée (abrégié sous la forme FTBF) :

$$FTBF = H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

- Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (abrégié sous la forme FTBO) :

$$FTBO = \frac{S'(p)}{e(p)}$$

Calcul de la FTBF et de la FTBO dans le cas de la boucle d'asservissement classique représentée ci-dessus :

$$FTBO = \frac{S'(p)}{e(p)} = A(p)B(p)$$

$$\begin{aligned}
 S(p) &= A(p)e(p) \\
 &= A(p)[E(p) - S'(p)] \\
 &= A(p)[E(p) - B(p)S(p)] \\
 S(p)[1 + A(p)B(p)] &= A(p)E(p)
 \end{aligned}$$

Soit la fonction de transfert en boucle fermée : $FTBF = H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ $H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$

Ce qui peut encore se présenter sous la forme : $FTBF = H(p) = \frac{A(p)}{1 + FTBO}$

Chaque fonction de transfert étant un rapport polynomial, peut donc s'écrire :

$$H(p) = \frac{K \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{p}{z_i}\right)}{p^a \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{p}{p_j}\right)} \text{ où : } \begin{cases} a : \text{classe du système} \\ K : \text{gain statique du système} \\ n : \text{ordre du système} \\ p_j : (\text{zéros du dénominateur}) \text{ poles de la fonction de transfert} \\ z_i : (\text{zéros du numérateur}) \text{ zéros de la fonction de transfert} \end{cases}$$

1.3 Analyse fréquentielle

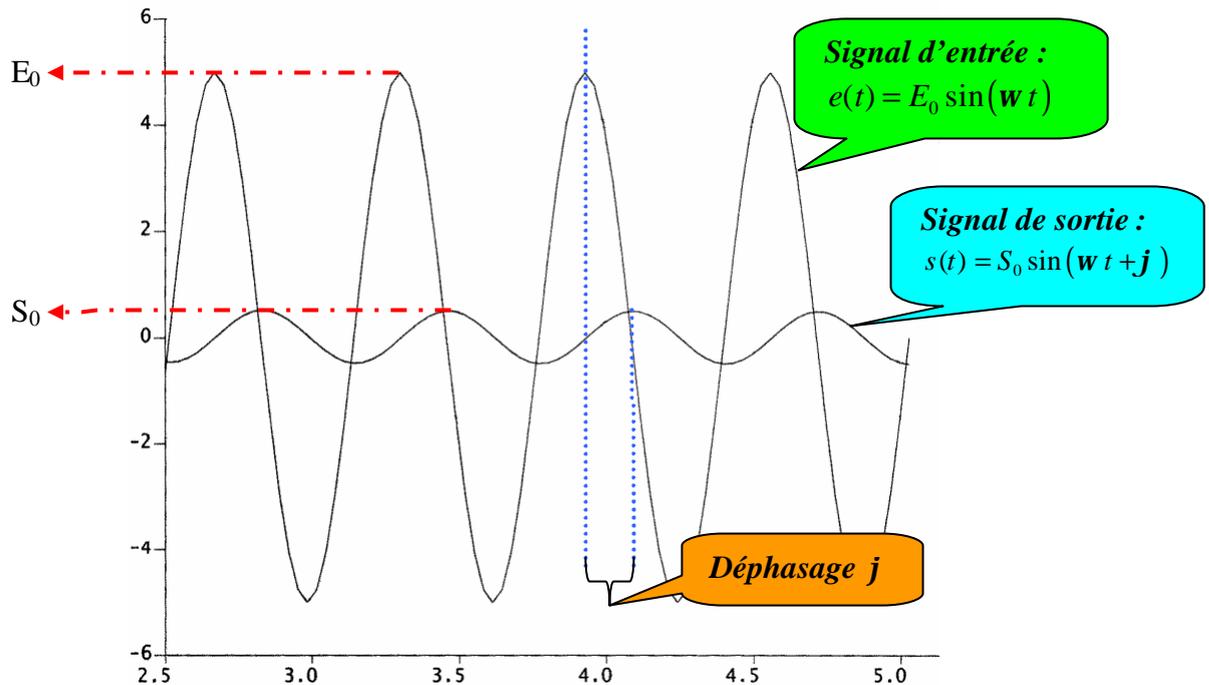
1.3.1 Réponse harmonique

On étudie la réponse du système soumis à une entrée harmonique, c'est à dire sinusoïdale :

$$e(t) = E_0 \sin(\omega t)$$

On démontre qu'une des caractéristiques des systèmes linéaires continus invariants est qu'ils présentent une réponse en régime établi (solution particulière de l'équation différentielle) de la même forme que l'entrée, c'est à dire sinusoïdale mais déphasée et d'amplitude

différente : $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \mathbf{j})$



On étudie alors le rapport d'amplitude sortie sur entrée $\frac{S_0}{E_0}$ et le déphasage j en fonction de la pulsation du signal d'entrée ω .

On montre que le rapport des amplitudes est égal au module de la fonction de transfert avec $p = j\omega$ et que le déphasage est égal à l'argument de la fonction de transfert avec $p = j\omega$.

Conclusion : L'étude fréquentielle d'un système de fonction de transfert $H(p)$ consiste donc à effectuer $p = j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert et à étudier le complexe $H(j\omega)$ souvent par son module (alors exprimé en décibels : $\|H(j\omega)\|_{dB} = 20 \log \|H(j\omega)\|$) et son argument ($j(\omega) = \text{Arg}[H(j\omega)]$) ou bien par sa partie réelle et sa partie imaginaire.

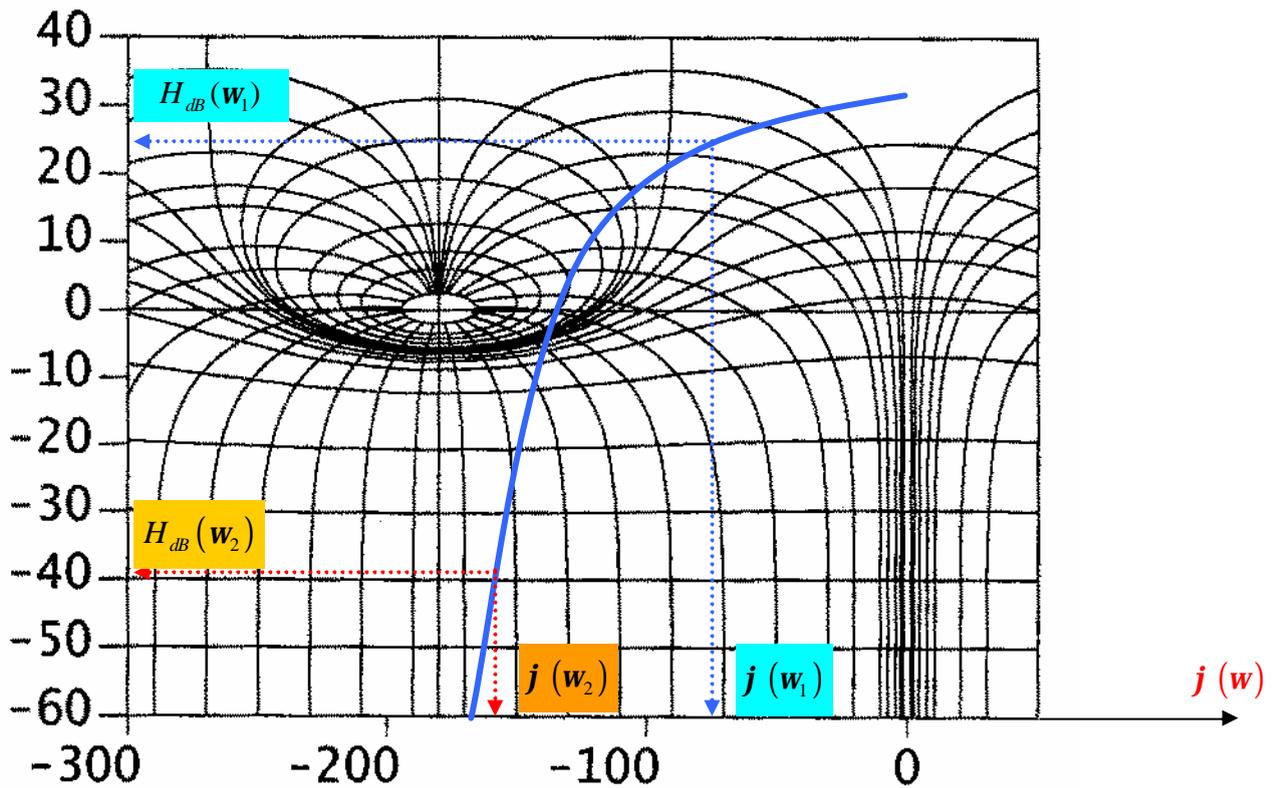
1.3.2 Représentation fonctionnelle

Représentation dans le plan de Black : Diagramme de Black :

On représente le gain exprimé en décibels en fonction de la phase en degré pour une même pulsation ω . On obtient donc une courbe paramétrée par ω .

Cette représentation est très utilisée pour concevoir la correction d'un système. Elle est aussi assez souvent rencontrée dans les sujets de SI en Classe Préparatoire aux Grandes Ecoles.

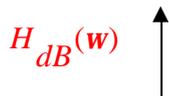
$$\|H(j\omega)\|_{dB} = H_{dB}(\omega)$$

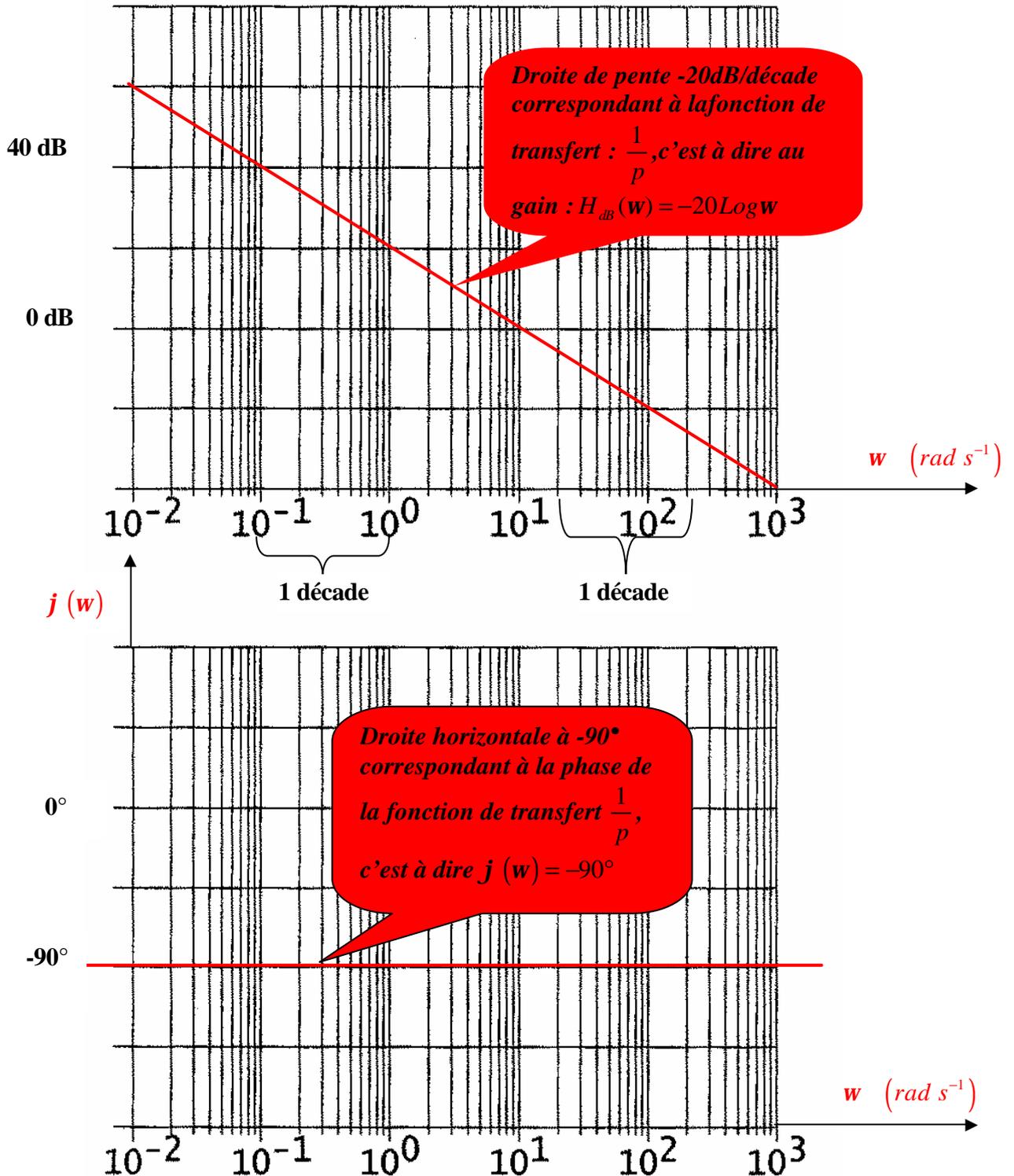


Représentation dans le plan de Bode : Diagrammes de Bode

On représente le gain du système en fonction de la pulsation w sur une courbe avec une échelle logarithmique en abscisse (voir exemple ci-dessous).

On représente la phase du système en fonction de la pulsation w sur une autre courbe avec toujours l'échelle logarithmique pour les pulsations w (voir exemple ci-dessous).





Représentation dans le plan de Nyquist :

On trace la courbe paramétrée par la pulsation w avec en abscisse, la partie réelle du complexe $H(jw)$ et en ordonnée la partie imaginaire du complexe $H(jw)$.