SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

ANALYSE FREQUENTIELLE

3 Système du deuxième ordre.

3.1 Définition d'un système du deuxième ordre

Un système du second ordre a son comportement régi par une équation différentielle du deuxième ordre de la forme :

$$\frac{1}{w_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2x}{w_0}\frac{ds}{dt}+s=Ke$$

$e=e(t)$ entréedusystème
$s=s(t)$ réponsedusystèmeàl'entréee(t)
K:gainstatique(>0)
x :coefficient d'amortissement (sans dimension) (>0)
w_0 pulsationpropredusystème(enrads^{-1})

3.2 Fonction de transfert globale d'un deuxième ordre

On applique la transformée de Laplace à l'ensemble de l'équation différentielle ci-dessus, avec des conditions initiales nulles :

Donc :

$$\frac{1}{w_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2x}{w_0}\frac{ds}{dt}+s=Ke \quad \xrightarrow{\text{transformée de Laplace}} \quad \frac{p^2}{w_0^2}S(p)+\frac{2x}{w_0}pS(p)+S(p)=KE(p)$$

On peut alors présenter le rapport de la sortie S(p) sur l'entrée E(p), c'est à dire la fonction de transfert globale du système : $H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2x}{w_0}p+\frac{p^2}{w_0^2}}$

On notera :

- Le gain statique vaut : K=H(0)
- Pour identifier les caractéristiques d'un système du deuxième ordre (c'est à dire K, x et w_0), on veillera bien à présenter la fonction de transfert globale H(p) avec le coefficient en p^0 du polynôme au dénominateur égal à 1. Ainsi le numérateur peut être identifié au gain statique K, coefficient en p^2 du polynôme au dénominateur peut être identifié à l'inverse de la pulsation propre w_0 et on déduit l'amortissement du coefficient en p^1 : $\frac{2x}{w_0}$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

3.3 Gain et phase réels d'un deuxième ordre

$$H(jw)=\frac{K}{1+\frac{2x}{w_0}jw+\frac{(jw)^2}{w_0^2}}=\frac{K}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)+j\frac{2xw}{w_0}}$$

Calcul du gain :

$$\|H(jw)\|=\frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}}$$ soit en dB : $\|H(jw)\|_{dB}=20Log\|H(jw)\|$

$$\|H(jw)\|_{dB}=20LogK-20Log\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}$$

Existence d'une résonance :

Il existe une résonance si il existe une pulsation w_r dite pulsation de résonance pour laquelle le gain $\|H(jw)\|_{dB}=20LogK-20Log\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}$ présente un maximum.

Le gain est maximum si la fonction de w : $\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}$ est minimale :

Etude de cette fonction : Posons $x=\frac{w^2}{w_0^2}$, alors la fonction : $f(w)=\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}$ est minimale si la fonction : $g(x)=(1-x)^2+4x^2x=1+(4x^2-2)x+x^2$ est minimale .

$g'(x)=4x^2-2+2x$, donc on a un extremum pour x telque $g'(x)=0$, c'est à dire pour $x=1-2x^2$.

Donc la pulsation pour laquelle on a résonance est : $w_r=w_0\sqrt{1-2x^2}$

Remarque : On voit donc bien que la résonance ne peut exister que dans certains cas d'amortissement (terme sous la racine positif).

On a résonance pour des valeurs d'amortissement : $x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

Quantification de la résonance : facteur de surtension Q

Le facteur de surtension exprimé en dB est la différence entre la valeur du pic de résonance et le gain statique : $Q_{dB}=\|H(jw_r)\|_{dB}-20LogK$

$$Q_{dB}=\|H(jw_r)\|_{dB}-20LogK=-20Log\sqrt{\left(1-\frac{w_r^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w_r^2}{w_0^2}}$$

$$Q_{dB}=-20Log\sqrt{\left(1-\left(1-2x^2\right)\right)^2+4x^2\left(1-2x^2\right)}$$

$$Q_{dB}=-20Log\sqrt{4x^4+4x^2-8x^4}=-20Log\sqrt{4x^2-4x^4}=-20Log\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

D'où le résultat final : $Q_{dB} = 20Log\dfrac{1}{\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)}$ Or Q est tel que $Q_{dB} = 20LogQ$, donc :

$$Q = \frac{1}{\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)}$$

Calcul de la phase :

$$j(w) = Arg[H(jw)]$$

$$H(jw) = \frac{K}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)+j\frac{2xw}{w_0}} = \frac{K}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}\left[\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right], \text{ donc :}$$

$$j(w) = Arg[H(jw)] = Arg\left[\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right]$$

$$\tan j = \frac{\mathrm{Im}\left(\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right)}{\mathrm{Re}\left(\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right)};\cos j = \frac{\mathrm{Re}\left(\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right)}{\left\|\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right\|};\sin j = \frac{\mathrm{Im}\left(\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right)}{\left\|\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right\|}$$

Donc : $\tan j = \dfrac{\frac{-2xw}{w_0}}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)};\cos j = \dfrac{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}};\sin j = \dfrac{\frac{-2xw}{w_0}}{\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}}$

$$j(w) = -\arctan\left[\frac{\frac{2xw}{w_0}}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)}\right]$$

3.4 Asymptotes des diagrammes de Bode

Deux méthodes sont possibles pour déterminer les asymptotes des diagrammes de Bode : Soit on détermine les équivalents en 0 et en $+\infty$ du gain réel et de la phase réelle, soit on cherche des équivalents directement sur la fonction de transfert.

1ère méthode : équivalents à partir des fonctions de gain et de phase réels.

Asymptote sur le diagramme de gain :

$\|H(jw)\|_{dB} = 20LogK - 20Log\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}$ est la fonction du gain (en dB) réelle

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.