SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

ANALYSE FREQUENTIELLE

3 Système du deuxième ordre.

3.1 Définition d'un système du deuxième ordre

Un système du second ordre a son comportement régi par une équation différentielle du deuxième ordre de la forme :

$$\frac{1}{w_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2x}{w_0}\frac{ds}{dt}+s=Ke \quad \left\{\begin{array}{l} e=e(t) \quad \text{entrée du système} \\ s=s(t) \quad \text{réponse du système à l'entrée e(t)} \\ \text{K : gain statique (>0)} \\ x \text{ : coefficient d'amortissement (sans dimension) (>0)} \\ w_0 \quad \text{pulsation propre du système (en rad s}^{-1}\text{)} \end{array}\right.$$

3.2 Fonction de transfert globale d'un deuxième ordre

On applique la transformée de Laplace à l'ensemble de l'équation différentielle ci-dessus, avec des conditions initiales nulles :

Donc :

$$\frac{1}{w_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2x}{w_0}\frac{ds}{dt}+s=Ke \xrightarrow{\text{transformée de Laplace}} \frac{p^2}{w_0^2}S(p)+\frac{2x}{w_0}pS(p)+S(p)=KE(p)$$

On peut alors présenter le rapport de la sortie S(p) sur l'entrée E(p), c'est à dire la fonction de transfert globale du système : $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{K}{1+\dfrac{2x}{w_0}p+\dfrac{p^2}{w_0^2}}$

On notera :

- Le gain statique vaut : K=H(0)
- Pour identifier les caractéristiques d'un système du deuxième ordre (c'est à dire K, x et w_0), on veillera bien à présenter la fonction de transfert globale H(p) avec le coefficient en p^0 du polynôme au dénominateur égal à 1. Ainsi le numérateur peut être identifié au gain statique K, coefficient en p^2 du polynôme au dénominateur peut être identifié à l'inverse de la pulsation propre w_0 et on déduit l'amortissement du coefficient en p^1 : $\dfrac{2x}{w_0}$.

3.3 Gain et phase réels d'un deuxième ordre

$$H(jw) = \frac{K}{1+\frac{2x}{w_0}jw+\frac{(jw)^2}{w_0{}^2}} = \frac{K}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)+j\frac{2xw}{w_0}}$$

Calcul du gain :

$$\|H(jw)\| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}}$$ soit en dB : $\|H(jw)\|_{dB} = 20Log\|H(jw)\|$

$$\|H(jw)\|_{dB} = 20LogK - 20Log\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}$$

Existence d'une résonance :

Il existe une résonance si il existe une pulsation w_r dite pulsation de résonance pour laquelle le gain $\|H(jw)\|_{dB} = 20LogK - 20Log\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}$ présente un maximum.

Le gain est maximum si la fonction de w : $\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}$ est minimale :

Etude de cette fonction : Posons $x = \frac{w^2}{w_0^2}$, alors la fonction : $f(w) = \left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}$ est minimale si la fonction : $g(x) = (1-x)^2 + 4x^2x = 1+(4x^2-2)x+x^2$ est minimale .

$g'(x) = 4x^2-2+2x$, donc on a un extremum pour x telque $g'(x)=0$, c'est à dire pour $x = 1-2x^2$.

Donc la pulsation pour laquelle on a résonance est : $w_r = w_0\sqrt{1-2x^2}$

Remarque : On voit donc bien que la résonance ne peut exister que dans certains cas d'amortissement (terme sous la racine positif).

On a résonance pour des valeurs d'amortissement : $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Quantification de la résonance : facteur de surtension Q

Le facteur de surtension exprimé en dB est la différence entre la valeur du pic de résonance et le gain statique : $Q_{dB} = \|H(jw_r)\|_{dB} - 20LogK$

$$Q_{dB} = \|H(jw_r)\|_{dB} - 20LogK = -20Log\sqrt{\left(1-\frac{w_r^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w_r^2}{w_0^2}}$$

$$Q_{dB} = -20Log\sqrt{\left(1-(1-2x^2)\right)^2+4x^2(1-2x^2)}$$

$$Q_{dB} = -20Log\sqrt{4x^4+4x^2-8x^4} = -20Log\sqrt{4x^2-4x^4} = -20Log\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

D'où le résultat final : $Q_{dB} = 20Log\,\frac{1}{\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)}$ Or Q est tel que $Q_{dB} = 20Log\,Q$, donc :

$$Q = \frac{1}{\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)}$$

Calcul de la phase :

$$j(w) = Arg\left[H(jw)\right]$$

$$H(jw) = \frac{K}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)+j\frac{2xw}{w_0}} = \frac{K}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}\left[\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right] \text{, donc :}$$

$$j(w) = Arg\left[H(jw)\right] = Arg\left[\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right]$$

$$\tan j = \frac{\mathrm{Im}\left(\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right)}{\mathrm{Re}\left(\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right)};\cos j = \frac{\mathrm{Re}\left(\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right)}{\left\|\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right\|};\sin j = \frac{\mathrm{Im}\left(\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right)}{\left\|\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)-j\frac{2xw}{w_0}\right\|}$$

Donc : $\tan j = \frac{\frac{-2xw}{w_0}}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)};\cos j = \frac{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}};\sin j = \frac{\frac{-2xw}{w_0}}{\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}}$

$$j(w) = -\arctan\left[\frac{\frac{2xw}{w_0}}{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)}\right]$$

3.4 Asymptotes des diagrammes de Bode

Deux méthodes sont possibles pour déterminer les asymptotes des diagrammes de Bode : Soit on détermine les équivalents en 0 et en $+\infty$ du gain réel et de la phase réelle, soit on cherche des équivalents directement sur la fonction de transfert.

1ère méthode : équivalents à partir des fonctions de gain et de phase réels.

Asymptote sur le diagramme de gain :

$\left\|H(jw)\right\|_{dB} = 20LogK - 20Log\sqrt{\left(1-\frac{w^2}{w_0^2}\right)^2+\frac{4x^2w^2}{w_0^2}}$ est la fonction du gain (en dB) réelle