ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit $n \geq 2$. On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$

1) Montrer que, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq n$, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $L_j(i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(j) = 1$.

Montrer que l'on a $L_j(X) = \dfrac{(-1)^{n-j}}{n!}\binom{n}{j}\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(X-k)$.

2) Montrer que $B = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de E.

3) Calculer : $L_0 + L_1 + \cdots + L_n$ et $L_1 + 2L_2 + \cdots + nL_n$.

4) On pose, pour tout $(P,Q) \in E^2, < P,Q >= \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

a) Montrer que l'on définit sur E un produit scalaire. On notera $||.||$ la norme associée.

b) Que peut-on dire de B pour ce produit scalaire ?

5) On considère $H = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Déterminer un réel λ_k tel que $X^n + \lambda_k L_k \in H$.

6) Soit $P \in H^{\perp}$. Montrer que les coordonnées de P dans la base B sont

$\alpha_k = \dfrac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\sum_{j=0}^{n} P(j)j^n$, $k \in [\![0,n]\!]$.

7) Soit π la projection orthogonale de E sur H.

On pose $d(X^n, H) = ||X^n - \pi(X^n)||$.

a) Montrer que $||X^n - \pi(X^n)|| = n! \times ||L_0 - \pi(L_0)||$.

b) Soit $Q = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}L_i$. Montrer que $Q \in H^{\perp}$.

c) En déduire que $d(X^n, H) = n! \times \dfrac{|< L_0, Q >|}{||Q||}$

d) Démontrer que $d(X^n, H) = \dfrac{n!}{\sqrt{\binom{2n}{n}}}$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.