ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

On considére $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B et du produit scalaire canonique associé, que l'on notera $< \, , \, >$. On notera $||.||$ la norme associée. Soit $e = (\alpha, \beta,)$ un vecteur normé de E. On note D la droite vectorielle engendrée par e.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f_a l'application définie sur E par :

$\forall x \in E, \; f_a(x) = x + a < x, e > e$.

1) Vérifier que f_a est un endomorphisme de E.

2) a) Montrer qu'il existe une valeur $b \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in E, \; ||f_b(x)|| = ||x||$

b) Calculer $f_b \circ f_b$ et montrer que $\mathrm{Ker}(f_b + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f_b - \mathrm{Id}) = E$.

3) On revient au cas général où a est quelconque .

a) Montrer que f_a est un endomorphisme symétrique de E.

b) Déterminer les éléments propres de f_a.

4) On suppose dans cette question que $a \neq -1$ et on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique B. On définit alors sur E l'application h_a par :

$$\forall u = (x, y, z) \in E, \; h_a(u) = {}^tX M_a X \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Déterminer les extremums de h_a.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.