ALGEBRE BILINEAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit $n \geq 2$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est la matrice de terme général $a_{i,j}$, on appelle trace de A le nombre $\text{tr}(A) = \sum_{i=0}^{n} a_{i,i}$. On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E formé des matrices symétriques et $A_n(R)$ celui des matrices anti-symétriques (c'est-à-dire vérifiant ${}^tA = -A$). On pose enfin $< A, B >= \text{tr}(A^tB)$.

1) Exprimer $< A, B >$ en fonction des coefficients de A et de B et montrer que

$(A, B) \longmapsto < A, B >$ est un produit scalaire sur E. On notera $||.||$ la norme associée.

2) Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

3) On suppose ici $n = 3$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer la distance de M à $S_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\inf_{N \in S_3(\mathbb{R})} ||A - N||$.

4) Soit $H = \{M \in E \ / \ \text{tr}(M) = 0\}$.

a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et en donner sa dimension.

b) Soit $M \in H$. Calculer $< M, I_n >$ où I_n est la matrice unité de E.

c) Soit J la matrice de E dont tous les termes valent 1. Déterminer $d(J, H)$, distance de J à H.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.