VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \exp(-|x|)\ln(1+e^{|x|}).$$

Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale

$K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\ln(1+e^t)dt$ converge.

2) Vérifier que $\forall t \geq 0,\ e^{-t}\ln(1+e^t) = te^{-t} + e^{-t}\ln(1+e^{-t})$.

3) Calculer les intégrales suivantes :

$$C = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt \quad \text{et} \quad D = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(1+e^{-t})dt.$$

En déduire la convergence et la valeur de J.

4) Déterminer le réel a tel que l'application $f = ag$ soit une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X de densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{4\ln 2}\exp(-|x|)\ln(1+e^{|x|}).$$

On note

$$I(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt.$$

5) Montrer que $I(X)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tg(t)dt$ converge.

6) Montrer que, sous réserve de convergence des intégrales,

$$I(X) = \underbrace{\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt}_{U} + \underbrace{\int_0^{+\infty} te^{-t}\ln(1+e^{-t})dt}_{V}.$$

7) Etablir la convergence des intégrales U et V

8) En déduire que l'espérance $E(X)$ existe et la calculer.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Penser à la parité de g.

3) Pour D on trouvera $2\ln 2 - 1$ après une intégration par parties. Pour K, on trouvera $K = C + D = 2\ln 2$.

7) Penser aux croissances comparées ou, pour U, à une loi exponentielle.

8) On trouvera $E(X) = 0$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.