VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires, définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, de même loi définie, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, par :

$$X_i(\Omega) = \{n \in \mathbb{Z} \ / \ n \geq -1\} \ \text{ et } \forall k \geq -1, \ p(X_i = k) = \frac{1}{e(k+1)!}.$$

De plus, on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1) Déterminer la loi de S_n.

2) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} p(S_n \leq 0) = \frac{1}{2}$.

3)a) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle entre 0 et n, montrer que :

$$\forall n \geq 1, \ \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t} dt = 1 - p(S_n \leq 0).$$

b) En déduire un équivalent de $\int_0^n t^n e^{-t} dt$ quand $n \to +\infty$.