VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et m un réel strictement positif. Pour tout réel x on pose $G(x) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_x^{x+m} F(t)dt$.

1) Montrer que, si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, alors G est la fonction de répartition d'une variable à densité que l'on notera Y.

2) Dans cette question, on suppose que X suit la loi exponentielle sur $\mathbb{R}_+$ de paramStre λ et $m = 1$.

a) Déterminer la fonction de répartition G.

b) En déduire une densité g de Y.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Pour les limites en $\pm\infty$, penser à encadrer G en utilisant les variations de F.

2) a) envisager 3 cas : $[x, x+1] \subset \mathbb{R}^-$, $[x, x+1] \subset \mathbb{R}^+$ et $0 \in]x, x+1[$.

b) on trouvera $\begin{cases} g(x) &= 0 \text{ si } x \leq -1 \\ g(x) &= 1 - e^{-\lambda(x+1)} \text{ si } x \in [-1, 0] \\ g(x) &= (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

