VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires indépendantes $(n \geq 2)$ qui suivent la loi uniforme sur $[a, b]$, $a < b$.

1) On pose $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Z_n et en déduire une densité puis son espérance $E(Z_n)$.

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(Z_n)$.

2) On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y_n.

b) Calculer son espérance $E(Y_n)$. Quelle est la limite de $E(Y_n)$ lorsque $n \to +\infty$?

3) Exprimer a et b en fonction de $E(Z_n)$ et $E(Y_n)$.

En déduire deux estimateurs de a et b.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) a) On trouve $g(x) = \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)^n$ pour $x \in [a,b]$ et 0 ailleurs.

b) Penser à un changement de variable : on trouve $E(Z_n) = \dfrac{nb+a}{n+1}$.

2) a) Penser à l'événement $\min(X_1, \ldots, X_n) > x$. On trouvera pour F_n, répartition de Y_n,

$$\begin{cases} F_n(x) = 0 & \text{pour } x \leq a \\ F_n(x) = 1 - \left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^n & \text{pour } a \leq x \leq b \\ F-n(x) = 1 & \text{pour } x \geq b \end{cases}$$

b) $E_(Y_n) = \dfrac{na+b}{n+1}$.

3) $\dfrac{nY_n - Z_n}{n-1}$ est un estimateur de a ; $\dfrac{nZ_n - Y_n}{n-1}$ est un estimateur de b.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.