VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

On admettra ou on rappelle que si X et Y sont deux variables de densités respectives f et g, indépendantes, une densité de la somme $X+Y$ est h donnée par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(x-t)dt.$$

Formule appelée ‹‹ produit de convolution ›› de f et g.

1) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-2;2]$. Déterminer la loi de $-Y$.

2) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[-2;2]$.

a) Déterminer les lois de $S = X+Y$ et $D = X-Y$.

b) Donner la fonction de répartition de S.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

INDICATIONS DE SOLUTION

1) $-Y$ suit la même loi que Y (chercher sa fonction de répartition)

2) a) pour déterminer h, prendre une densité f de X et écrire $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x-t)dt$ en ayant considéré $f(t)$ dans le produit de « convolution », puis faire un changement de variable et positionner l'intervalle d'intégration par rapport à -2 et 2.

On trouvera $h(x) = 0$ si $x \notin [-4;4]$, $h(x) = \dfrac{x+4}{16}$ si $-4 \leq x \leq 0$ et $h(x) = \dfrac{4-x}{16}$ si $0 \leq x \leq 4$.

b) Pour la fonction de répartition H de S, distinguer les 4 cas : $x \leq -4,\ -4 \leq x \leq 0,\ 0 \leq x \leq 4$ et $x \geq 4$. On trouvera respectivement :

$H(x) = 1,\ H(x) = \dfrac{(x-4)^2}{16}$, $H(x) = 1 - \dfrac{(4-x)^2}{16}$ et $H(x) = 1$.