VARIABLES A DENSITE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 1$). On effectue dans cette urne deux tirages avec remise de un jeton à chaque fois. On note X_n et Y_n les numéros obtenus respectivement aux premier et second tirages et l'on pose $S_n = X_n + Y_n$.

1) Déterminer la loi de S_n.

2) On pose $Z_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que la suite (Z_n) converge en loi.

NB on rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

1) Pour calculer $P(S_n = k)$ $(2 \leq k \leq 2n)$ appliquer la formule des probabilités totales avec le sce $(X_n = i)_{1 \leq i \leq n}$ et montrer que $P(X_n = i)P(Y_n = k-i) \neq 0 \Longleftrightarrow \max(1, k-n) \leq i \leq \min(k-1, n)$.

On trouvera $P(S_n = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$ si $2 \leq k \leq n+1$ et $P(S_n = k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$ sinon.

2) Pour $F_n(x) = P(Z_n \leq x)$ distinguer $x \leq 0$, $0 < x \leq 1$, $1 < x \leq 2$ et $x > 2$. On trouvera respectivement pour $F_n(x)$: 0, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor (\lfloor nx \rfloor - 1)}{2n^2}$, $\dfrac{n-1}{2n} + \dfrac{(3n - \lfloor nx \rfloor + 1)(-n + \lfloor nx \rfloor)}{2n^2}$ et 1.

Pour la limite quand $n \to +\infty$: $\lfloor nx \rfloor \underset{+\infty}{\sim} nx$ pour $x > 0$ et on trouve pour $F(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \forall x \leq 0 \\ \quad = \dfrac{x^2}{2} & \forall x \in [0;1] \\ \quad = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1 & \forall x \in (1;2] \\ \quad = 1 & \forall x \geq 1. \end{cases}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.