FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE DE L 'EXERCICE

ENONCE :

Soit $n \geq 2$. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \ | \ \rangle$ et la norme associée $|| \ ||$. Soit f une fonction de classe C^1, définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \ \forall t \in [0,1], \ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on définit la fonction $\varphi_{x,h}$ par $\varphi_{x,h}(t) = f(x+th)$.

1) a) Montrer que $\varphi_{x,h}$ est dérivable et convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire que : $\varphi'_{x,h}(0) \leq \varphi_{x,h}(1) - \varphi_{x,h}(0)$.

2) Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a :

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x) | y-x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

où $\overrightarrow{\text{grad}} f(x)$ représente le gradient de f au point x.

3) On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f(0) = 0$. On suppose également que f est strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $x \neq y$ et pour tout $t \in]0,1[$,

$$f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y).$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(0) \leq 0$ puis que : $x \neq 0 \Longrightarrow f(x) > 0$.

b) Montrer que $\inf\limits_{(x/||x||=1)} f(x)$ existe. On note α sa valeur. Montrer que $\alpha > 0$.

c) Montrer que pour tout x / $||x|| > 1$, on a $f(x) \geq \alpha ||x||$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} f(x)$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.