FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

ENONCE DE L 'EXERCICE

ENONCE :

Soit $n \geq 2$. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle \mid \rangle$ et la norme associée $|| \; ||$. Soit f une fonction de classe C^1, définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on définit la fonction $\varphi_{x,h}$ par $\varphi_{x,h}(t) = f(x+th)$.

1) a) Montrer que $\varphi_{x,h}$ est dérivable et convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire que : $\varphi'_{x,h}(0) \leq \varphi_{x,h}(1) - \varphi_{x,h}(0)$.

2) Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a :

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x) | y - x \rangle \leq f(y) - f(x).$$

où $\overrightarrow{\text{grad}} f(x)$ représente le gradient de f au point x.

3) On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f(0) = 0$. On suppose également que f est strictement convexe, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tels que $x \neq y$ et pour tout $t \in]0,1[$,

$$f(tx+(1-t)y) < tf(x)+(1-t)f(y).$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n,\ f(0) \leq 0$ puis que : $x \neq 0 \Longrightarrow f(x) > 0$.

b) Montrer que $\inf\limits_{(x/||x||=1)} f(x)$ existe. On note α sa valeur. Montrer que $\alpha > 0$.

c) Montrer que pour tout x / $||x|| > 1$, on a $f(x) \geq \alpha ||x||$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} f(x)$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE