Table des matières

I Entiers naturels 2
I.1 L'ensemble N 2
I.2 Raisonnement par récurrence 2
I.3 Somme et produit 3
I.4 Relation d'ordre et différence 4
I.5 Division euclidienne 4
I.6 Pratique du raisonnement par récurrence 5
II Ensembles finis 6
II.1 Cardinal d'un ensemble fini 6
II.2 Propriétés des cardinaux 8
III Dénombrements 9
III.1 Applications entre ensembles finis 9
III.2 Arrangements et combinaisons 9
III.3 Binôme de Newton 10
IV Ensembles dénombrables 11

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

I Entiers naturels

I.1 L'ensemble N

Conformément au programme des classes préparatoires, l'ensemble $\mathbb{N}$ est supposé connu, ainsi que ses propriétés (opérations $+$ et $\times$, relation d'ordre).
Cependant, en voici une présentation minimale (ou presque) à partir de laquelle on pourrait retrouver toutes ses propriétés.

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$, dont les éléments sont appelés *entiers naturels*, tel que :

a. **Successeur d'un entier naturel**
Il existe une application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, appelée *succession*.
L'image par s d'un entier naturel n est appelée le *successeur* de n.

b. **Entier** 0
Il existe un élément de $\mathbb{N}$, noté 0, qui n'a pas d'antécédent par s.
On note 1 le successeur de 0, 2 celui de 1, 3 celui de 2, etc.
On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$: c'est l'ensemble des entiers naturels *non nuls*.

c. **Prédécesseur d'un entier naturel non nul**
L'application s est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N} - \{0\}$.
Tout n de $\mathbb{N}^*$ est donc le successeur d'un unique m de $\mathbb{N}$, appelé le *prédécesseur* de n.

d. **Axiome de récurrence**
Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que : $0 \in A$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \in A \Rightarrow s(n) \in A$. Alors $A = \mathbb{N}$.
Autrement dit, si une partie A de $\mathbb{N}$ contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie A est égale à $\mathbb{N}$ tout entier.

Tout cela permet par exemple de définir une *addition* sur $\mathbb{N}$, de la manière suivante :

$$\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad m+0=m, \quad m+s(n)=s(m+n)$$

On constate que : $\forall\, m \in \mathbb{N},\ s(m) = m+1$ (poser $n=0$ dans la définition précédente).

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $n-1$ le prédécesseur de n. Ainsi $m = n-1 \Leftrightarrow n = m+1 \ldots$

L'axiome de récurrence s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \text{Soit } A \text{ une partie de } \mathbb{N}, \text{ contenant } 0. \\ \text{On suppose que : } \forall\, n \in A,\ n+1 \in A. \text{ Alors } A = \mathbb{N}. \end{cases}$$

I.2 Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat, de référentiel $\mathbb{N}$.

Rappelons qu'on écrit $\mathcal{P}(n)$ pour dire "$\mathcal{P}(n)$ est vraie".

Récurrence simple (ou faible)

$$\begin{cases} \text{On suppose } \mathcal{P}(0) \text{ et, pour tout entier } n,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1). \\ \text{Alors, pour tout entier } n,\ \mathcal{P}(n). \end{cases}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

Voici donc comment montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels :

- On vérifie que l'entier 0 satisfait à la propriété : c'est le *pas initial* de la récurrence.
- On se **donne** ensuite un entier n, pour lequel on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  C'est l'*hypothèse de récurrence*.
- On démontre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (c'est le "*passage du rang n au rang $n+1$*").
  On exprime l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ en disant que la propriété $\mathcal{P}$ est *héréditaire*.
- On conclut en annonçant que, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

I.3 Somme et produit

Toutes les opérations sur $\mathbb{N}$ peuvent être définies par récurrence (on l'a déja vu pour l'addition). Leurs propriétés peuvent être établies de la même manière.

Addition

$\left\{\begin{array}{l} \text{La loi } + \text{ est } \textit{associative} : \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3, m+(n+p) = (m+n)+p. \\ \text{La loi } + \text{ est } \textit{commutative} : \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, m+n = n+m. \\ 0 \text{ est } \textit{élément neutre} : \forall\, n \in \mathbb{N}, n+0 = n \text{ (cette propriété découle de la définition).} \\ \text{Tout élément de } \mathbb{N} \text{ est } \textit{régulier} : \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3, m+p = n+p \Rightarrow m = n. \\ \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, m+n = 0 \Leftrightarrow m = n = 0. \end{array}\right.$

Multiplication

On définit un *produit* sur $\mathbb{N}$, en posant : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, \left\{\begin{array}{l} m0 = 0 \\ m(n+1) = mn + m \end{array}\right.$

Une récurrence montre que mn est défini pour tout couple (m,n).

Toujours par récurrence, on peut alors vérifier les propriétés suivantes :

$\left\{\begin{array}{l} \text{La loi } \times \text{ est } \textit{distributive} \text{ par rapport à la loi } + : \\ \quad \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3, m(n+p) = mp + mp. \\ \text{La loi } \times \text{ est associative} : \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3, m(np) = (mn)p. \\ \text{La loi } \times \text{ est commutative} : \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, mn = nm. \\ \text{Tout élément de } \mathbb{N}^* \text{ est régulier} : \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, \forall\, p \in \mathbb{N}^*, mp = np \Rightarrow m = n. \\ 1 \text{ est élément neutre} : \forall\, n \in \mathbb{N}, n1 = n. \end{array}\right.$

Factorielle

On définit $n!$ (*factorielle* n) par $0! = 1$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n! = n\,(n-1)!$. Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Exponentiation

On définit la notation m^n : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, m^0 = 1, m^{n+1} = m^n\, m$.

On montre alors les propriétés suivantes par récurrence :

$\left\{\begin{array}{l} \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3 : m^n\, m^p = m^{n+p},\ (m^n)^p = m^{np},\ (mn)^p = m^p\, n^p. \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n^1 = n, 1^n = 1; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0 \text{ (mais par convention } 0^0 = 1). \end{array}\right.$

Remarques

$mn = 1 \Leftrightarrow m = n = 1$; $mn = 0 \Leftrightarrow (m = 0)$ ou $(n = 0)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

I.4 Relation d'ordre et différence

Définition

On pose : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \leq n \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N},\ m+p=n$.

Les notations $n \geq m$ et $m \leq n$ sont bien sûr équivalentes.

On note $m < n$ pour écrire : $(m \leq n)$ et $(m \neq n)$.

Soit (m,n) dans $\mathbb{N}^2$. On pose : $[\![m,n]\!] = \{p \in \mathbb{N}, m \leq p \leq n\}$.

Propriétés

- $\leq$ définit une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$. $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 : m < n \Leftrightarrow m+1 \leq n \Leftrightarrow m \leq n-1$.
- 0 est le minimum de $\mathbb{N}$.
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.
- La relation $\leq$ est *compatible* avec les opérations $+$ et $\times$, ce qui signifie :
  $\forall (m,n,p) \in \mathbb{N} :\ m \leq n \Rightarrow (m+p \leq n+p)$ et $(mp \leq np)$

Soustraction

Soit (m,n) un couple d'entiers naturels, tels que $m \leq n$. L'entier p tel que $m+p=n$ (unique par régularité) est appelé *différence* de n et de m, et on note $p = n-m$.

Cette notation généralise celle qui a été utilisée au début de ce chapitre pour définir le prédécesseur $m = n-1$ d'un entier naturel non nul n.

Cette "opération" n'est pas partout définie sur $\mathbb{N}$ (l'entier p n'existe que si $m \leq n$).

Propriétés

On a (entre autres) les égalités suivantes, sous réserve que les différences existent dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \forall (m,n,p) \in \mathbb{N}^3, (m-n)-p = m-(n+p). \text{ Cette quantité est notée } m-n-p. \\ \forall (m,n,p) \in \mathbb{N}^3, (m-n)+p = m-(n-p). \text{ Cette quantité est notée } m-n+p. \\ \forall (m,n,p) \in \mathbb{N}^3, (m+n)-p = m+(n-p). \text{ Cette quantité est notée } m+n-p. \end{cases}$$

I.5 Division euclidienne

Définition

On dit que n *divise* m (ou que m est un *multiple* de n) si : $\exists q \in \mathbb{N}, m = nq$.

On note alors $n \mid m$. On définit ainsi une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.

Pour cette relation, 1 est le minimum de $\mathbb{N}$.

Définition

Soit (m,n) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Il existe un unique couple (q,r) de $\mathbb{N}^2$ tel que : $(m = nq+r)$ et $(r \leq n-1)$

Le passage du couple (m,n) au couple (q,r) s'appelle *division euclidienne* de m par n.

Dans cette division, m est le *dividende*, n le *diviseur*, q le *quotient*, et r le *reste*.

Remarque

$n \mid m \Leftrightarrow (m = n = 0)$ ou ($n \neq 0$ et le reste dans la division de m par n est nul).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.