Table des matières

I Entiers naturels

I.1 L'ensemble N

Conformément au programme des classes préparatoires, l'ensemble $\mathbb{N}$ est supposé connu, ainsi que ses propriétés (opérations $+$ et $\times$, relation d'ordre).
Cependant, en voici une présentation minimale (ou presque) à partir de laquelle on pourrait retrouver toutes ses propriétés.

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{N}$, dont les éléments sont appelés *entiers naturels*, tel que :

a. **Successeur d'un entier naturel**
Il existe une application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, appelée *succession*.
L'image par s d'un entier naturel n est appelée le *successeur* de n.

b. **Entier** 0
Il existe un élément de $\mathbb{N}$, noté 0, qui n'a pas d'antécédent par s.
On note 1 le successeur de 0, 2 celui de 1, 3 celui de 2, etc.
On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$: c'est l'ensemble des entiers naturels *non nuls*.

c. **Prédécesseur d'un entier naturel non nul**
L'application s est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N} - \{0\}$.
Tout n de $\mathbb{N}^*$ est donc le successeur d'un unique m de $\mathbb{N}$, appelé le *prédécesseur* de n.

d. **Axiome de récurrence**
Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que : $0 \in A$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ n \in A \Rightarrow s(n) \in A$. Alors $A = \mathbb{N}$.
Autrement dit, si une partie A de $\mathbb{N}$ contient 0 et le successeur de chacun de ses éléments, alors cette partie A est égale à $\mathbb{N}$ tout entier.

Tout cela permet par exemple de définir une *addition* sur $\mathbb{N}$, de la manière suivante :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad m + 0 = m, \quad m + s(n) = s(m+n)$$

On constate que : $\forall m \in \mathbb{N},\ s(m) = m + 1$ (poser $n = 0$ dans la définition précédente).

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $n - 1$ le prédécesseur de n. Ainsi $m = n - 1 \Leftrightarrow n = m + 1 \ldots$

L'axiome de récurrence s'écrit maintenant :

$$\begin{cases} \text{Soit } A \text{ une partie de } \mathbb{N}, \text{ contenant } 0. \\ \text{On suppose que : } \forall n \in A,\ n+1 \in A. \text{ Alors } A = \mathbb{N}. \end{cases}$$

I.2 Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat, de référentiel $\mathbb{N}$.

Rappelons qu'on écrit $\mathcal{P}(n)$ pour dire "$\mathcal{P}(n)$ est vraie".

Récurrence simple (ou faible)

$$\begin{cases} \text{On suppose } \mathcal{P}(0) \text{ et, pour tout entier } n,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1). \\ \text{Alors, pour tout entier } n,\ \mathcal{P}(n). \end{cases}$$

Voici donc comment montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels :

- On vérifie que l'entier 0 satisfait à la propriété : c'est le *pas initial* de la récurrence.
- On se **donne** ensuite un entier n, pour lequel on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  C'est l'*hypothèse de récurrence.*
- On démontre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (c'est le "*passage du rang n au rang $n+1$*").
  On exprime l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ en disant que la propriété $\mathcal{P}$ est *héréditaire*.
- On conclut en annonçant que, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

I.3 Somme et produit

Toutes les opérations sur $\mathbb{N}$ peuvent être définies par récurrence (on l'a déja vu pour l'addition). Leurs propriétés peuvent être établies de la même manière.

Addition

$$\begin{cases} \text{La loi } + \text{ est } \textit{associative} : \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3, m+(n+p) = (m+n)+p. \\ \text{La loi } + \text{ est } \textit{commutative} : \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, m+n = n+m. \\ 0 \text{ est } \textit{élément neutre} : \forall\, n \in \mathbb{N}, n+0 = n \text{ (cette propriété découle de la définition).} \\ \text{Tout élément de } \mathbb{N} \text{ est } \textit{régulier} : \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3, m+p = n+p \Rightarrow m = n. \\ \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, m+n = 0 \Leftrightarrow m = n = 0. \end{cases}$$

Multiplication

On définit un *produit* sur $\mathbb{N}$, en posant : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} m0 = 0 \\ m(n+1) = mn + m \end{cases}$

Une récurrence montre que mn est défini pour tout couple (m,n).

Toujours par récurrence, on peut alors vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{La loi } \times \text{ est } \textit{distributive} \text{ par rapport à la loi } + : \\ \quad \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3, m(n+p) = mp + mp. \\ \text{La loi } \times \text{ est associative} : \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3, m(np) = (mn)p. \\ \text{La loi } \times \text{ est commutative} : \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, mn = nm. \\ \text{Tout élément de } \mathbb{N}^* \text{ est régulier} : \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, \forall\, p \in \mathbb{N}^*, mp = np \Rightarrow m = n. \\ 1 \text{ est élément neutre} : \forall\, n \in \mathbb{N}, n1 = n. \end{cases}$$

Factorielle

On définit $n!$ (*factorielle* n) par $0! = 1$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n! = n\,(n-1)!$. Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Exponentiation

On définit la notation m^n : $\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2, m^0 = 1, m^{n+1} = m^n\, m$.

On montre alors les propriétés suivantes par récurrence :

$$\begin{cases} \forall\,(m,n,p) \in \mathbb{N}^3 : m^n\, m^p = m^{n+p},\ (m^n)^p = m^{np},\ (mn)^p = m^p\, n^p. \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n^1 = n, 1^n = 1; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0 \text{ (mais par convention } 0^0 = 1). \end{cases}$$

Remarques

$mn = 1 \Leftrightarrow m = n = 1\,;\ mn = 0 \Leftrightarrow (m = 0) \text{ ou } (n = 0)$.

I.4 Relation d'ordre et différence

Définition

On pose : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \leq n \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N},\ m+p=n$.
Les notations $n \geq m$ et $m \leq n$ sont bien sûr équivalentes.
On note $m < n$ pour écrire : $(m \leq n)$ et $(m \neq n)$.
Soit (m,n) dans $\mathbb{N}^2$. On pose : $[\![m,n]\!] = \{p \in \mathbb{N}, m \leq p \leq n\}$.

Propriétés

- $\leq$ définit une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$. $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 : m < n \Leftrightarrow m+1 \leq n \Leftrightarrow m \leq n-1$.
- 0 est le minimum de $\mathbb{N}$.
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.
- La relation $\leq$ est *compatible* avec les opérations $+$ et $\times$, ce qui signifie :
  $\forall (m,n,p) \in \mathbb{N} :\ m \leq n \Rightarrow (m+p \leq n+p)$ et $(mp \leq np)$

Soustraction

Soit (m,n) un couple d'entiers naturels, tels que $m \leq n$. L'entier p tel que $m+p=n$ (unique par régularité) est appelé *différence* de n et de m, et on note $p = n - m$.
Cette notation généralise celle qui a été utilisée au début de ce chapitre pour définir le prédécesseur $m = n-1$ d'un entier naturel non nul n.
Cette "opération" n'est pas partout définie sur $\mathbb{N}$ (l'entier p n'existe que si $m \leq n$).

Propriétés

On a (entre autres) les égalités suivantes, sous réserve que les différences existent dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \forall (m,n,p) \in \mathbb{N}^3, (m-n)-p = m-(n+p). \text{ Cette quantité est notée } m-n-p. \\ \forall (m,n,p) \in \mathbb{N}^3, (m-n)+p = m-(n-p). \text{ Cette quantité est notée } m-n+p. \\ \forall (m,n,p) \in \mathbb{N}^3, (m+n)-p = m+(n-p). \text{ Cette quantité est notée } m+n-p. \end{cases}$$

I.5 Division euclidienne

Définition

On dit que n *divise* m (ou que m est un *multiple* de n) si : $\exists q \in \mathbb{N}, m = nq$.
On note alors $n \mid m$. On définit ainsi une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}$.
Pour cette relation, 1 est le minimum de $\mathbb{N}$.

Définition

Soit (m,n) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
Il existe un unique couple (q,r) de $\mathbb{N}^2$ tel que : $(m = nq+r)$ et $(r \leq n-1)$
Le passage du couple (m,n) au couple (q,r) s'appelle *division euclidienne* de m par n.
Dans cette division, m est le *dividende*, n le *diviseur*, q le *quotient*, et r le *reste*.

Remarque

$n \mid m \Leftrightarrow (m = n = 0)$ ou ($n \neq 0$ et le reste dans la division de m par n est nul).