



Table des matières

I	Le corps des nombres complexes	2
I.1	Définition de \mathbb{C}	2
I.2	Notation cartésienne	2
I.3	Conjugaison	3
I.4	Module	4
I.5	Fonctions à valeurs complexes	5
I.6	Le plan complexe	5
II	Argument, exponentielle complexe	6
II.1	Notation $\exp(i\theta)$	6
II.2	Formules de Moivre et d'Euler	6
II.3	Forme trigonométrique	7
II.4	Fonction exponentielle complexe	8
III	Equations polynômiales dans \mathbb{C}	9
III.1	Théorème de d'Alembert	9
III.2	Racines carrées d'un nombre complexe non nul	9
III.3	Equation du second degré	9
III.4	Racines N-ièmes d'un nombre complexe non nul	10
III.5	Racines N-ièmes de l'unité	10
IV	Trigonométrie	12
IV.1	Applications sinus et cosinus	12
IV.2	Applications tangente et cotangente	14
IV.3	Linéarisation	15
IV.4	Opération inverse de la linéarisation	16

I Le corps des nombres complexes

I.1 Définition de \mathbb{C}

Définition

On munit l'ensemble \mathbb{R}^2 des deux lois suivantes :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') \end{cases}$$

Proposition

Muni de ces deux lois, \mathbb{R}^2 possède une structure de corps. Plus précisément :

- Le neutre pour la loi $+$ est $(0, 0)$.
- L'opposé de (x, y) est $(-x, -y)$.
- Le neutre pour le produit est $(1, 0)$.
- Pour tout $z = (x, y)$ non nul, l'inverse de z est : $\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$.

Définition

On note \mathbb{C} l'ensemble \mathbb{R}^2 avec les deux lois précédentes.

Ses éléments $z = (x, y)$ sont appelés *nombres complexes*.

Proposition

L'ensemble $\mathbb{K} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-corps de \mathbb{C} .

L'application $f : x \rightarrow (x, 0)$ est un isomorphisme de corps de \mathbb{R} sur \mathbb{K} .

Conséquence

De cette manière $(\mathbb{R}, +, \times)$ apparaît comme un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cet isomorphisme permet d'identifier le complexe $(x, 0)$ avec le réel x .

I.2 Notation cartésienne

Dans le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, on note $i = (0, 1)$.

Pour tout $z = (x, y)$ de \mathbb{C} , on constate que $z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$.

Avec l'identification de \mathbb{R} avec un sous-corps de \mathbb{C} , on peut écrire : $z = x + iy$.

On a ainsi obtenu la notation *cartésienne* (ou *algébrique*) des nombres complexes.

Définition

Pour tout z de \mathbb{C} , il existe un couple unique (x, y) de \mathbb{R}^2 tel que $z = x + iy$.

Le réel x est appelé *partie réelle* de z et est noté $\operatorname{Re}(z)$.

Le réel y est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\operatorname{Im}(z)$.

Un nombre complexe z est dit *réel* si $\operatorname{Im}(z) = 0$.

z est dit *imaginaire pur* si $\operatorname{Re}(z) = 0$, c'est-à-dire si $z = iy$, avec y réel.

Remarques

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Les lois de \mathbb{C} s'écrivent maintenant :
$$\begin{cases} z + z' = (x + x') + i(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{cases}$$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ (on *identifie* les parties réelles et les parties imaginaires.)

En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (attention à vérifier que x et y sont réels!).

Puissances du nombre i

On constate que $i^2 = -1$. Donc $\frac{1}{i} = -i$.

En fait, $z^2 = -1 \Leftrightarrow z \in \{i, -i\}$.

Plus généralement $i^3 = -i$, et $i^4 = 1$.

Le sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) engendré par i est cyclique d'ordre 4 : $\langle i \rangle = \{1, i, -1, -i\}$.

Remarque

Si ω est un complexe non réel, alors on peut encore effectuer l'identification suivante :

$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 : x + \omega y = x' + \omega y' \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$.

I.3 Conjugaison

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.

Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est appelé le *conjugué* de z .

On nomme *conjugaison* l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie par $z \rightarrow \bar{z}$.

Proposition

La conjugaison est un automorphisme involutif du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cela signifie que :

- $\bar{\bar{z}} = z$; $\forall z \in \mathbb{C}, \bar{\bar{z}} = z$.

- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Propriétés

- Pour tous complexes $z_1, \dots, z_n, \overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k$ et $\overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k$

- Pour tout z complexe : $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

- z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$.

- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

I.4 Module

Définition

- Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
 On appelle *module* de z la quantité, notée $|z|$, égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarques

On constate que $z\bar{z} = |z|^2$ (utile pour se “débarrasser” du module).

En particulier, si z est non nul, l'inverse de z est $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue.

Les notations $| \cdot |$ (valeur absolue ou module) sont donc compatibles.

Propriétés

L'application “module” vérifie les propriétés suivantes, pour tous (z, z') de \mathbb{C}^2 :

- $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|zz'| = |z||z'|$.
- Si z est non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Il y a égalité $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.
- $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'|$. Si $|z| \leq k < 1$, alors $1 - k \leq |1 + z| \leq 1 + k$.
- $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2, |u + v|^2 = |u|^2 + 2\operatorname{Re}(u\bar{v}) + |v|^2$.
- $\forall z \in \mathbb{C}, \max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.

Généralisation

Pour tous complexes z_1, \dots, z_n : $\left|\prod_{k=1}^n z_k\right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$ et $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

On a $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow$ les z_k sont produits de l'un d'entre eux par des réels positifs.

Proposition

- L'ensemble \mathcal{U} des complexes de module 1 est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .
 Pour tout z de \mathcal{U} , $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Proposition (Distance dans \mathbb{C})

- Soit d l'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers \mathbb{R} , définie par : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, d(z, z') = |z - z'|$.
 d est une *distance* sur \mathbb{C} , ce qui signifie qu'elle vérifie les propriétés suivantes :
- Pour tous nombres complexes u, v et w :
- $d(u, v) \geq 0$; $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$; $d(u, v) = d(v, u)$.
 - $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité triangulaire.)

I.5 Fonctions à valeurs complexes

Soit X un ensemble quelconque non vide.

$\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des applications définies sur X et à valeurs complexes.

Le plus souvent X désignera un intervalle de \mathbb{R} , ou l'ensemble \mathbb{N} (dans ce dernier cas, on obtient l'ensemble des suites à valeurs complexes).

On sait que $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est un anneau commutatif pour les lois déduites de \mathbb{C} , et définies par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}), \forall x \in X : \begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$$

Le neutre de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ pour la loi $+$ (resp. la loi \times) est l'application constante 0 (resp. 1).

Si f appartient à $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, on définit les éléments $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, \bar{f} et $|f|$ de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$:

$$\forall x \in X : \begin{cases} \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)) & \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)) \\ \bar{f}(x) = \overline{f(x)} & |f|(x) = |f(x)| \end{cases}$$

On a, pour les opérations “partie réelle”, “partie imaginaire”, “conjugaison” et “module”, des propriétés dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ analogues à celles qui ont été rencontrées dans \mathbb{C} .

I.6 Le plan complexe

Définition

Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0, e_1, e_2)$.

L'application qui à $z = x + iy$ (x, y réels) associe le point M de coordonnées (x, y) est une bijection de \mathbb{C} sur \mathcal{P} .

On dit que M est le *point image* de z , ou encore que z est l'*affiche* de M .

On note $M(z)$ pour désigner simultanément M et son affiche z .

Le plan \mathcal{P} , muni de cette correspondance, est appelé le *plan complexe*.

Le vecteur $OM = xe_1 + ye_2$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $z = x + iy$ (et on dit que z est l'affiche de ce vecteur).

Remarques

- $|z|$ est la distance $d(O, M)$ (ou la norme du vecteur OM).
Un argument de z est une mesure de l'angle (Ox, OM) .
- L'axe Ox est l'ensemble des points images des nombres réels.
L'axe Oy est l'ensemble des points images des imaginaires purs.
- Si on se donne deux points $A(a)$ et $M(z)$, le vecteur image de $z - a$ est AM .
Le module $|z - a|$ représente la distance $d(A, M)$.
- Le point N image de $a + z$ est le quatrième sommet du parallélogramme $OANM$ bâti sur les points O, A, M .

II Argument, exponentielle complexe

II.1 Notation $\exp(i\theta)$

Définition

|| Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Théorème

|| L'application $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe (\mathcal{U}, \times) des nombres complexes de module 1, de noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1$.
- $\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$.
- $\forall z \in \mathcal{U}$ (càd $|z| = 1$), $\exists \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = z$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv 0 (2\pi)$.

Propriétés

- L'application $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ est 2π -périodique : $e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta - \varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv \varphi (2\pi)$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta = \overline{e^{i\theta}}$.
- Valeurs particulières :
 $e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i3\pi/2} = -i, \quad e^{i2\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II.2 Formules de Moivre et d'Euler

Proposition (Formule de Moivre)

|| Pour tout réel θ , et pour tout entier n : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.
 || Autrement dit : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

Proposition (Formules d'Euler)

|| Pour tout réel θ : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Utilisation

- "Moivre" permet, en développant $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de puissances de $\cos \theta$ et/ou $\sin \theta$.
- Les formules d'Euler permettent, par utilisation de la formule du binôme et regroupement des termes équidistants des extrémités, de *linéariser* $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$, pour $n \geq 2$, c'est-à-dire de les exprimer en fonction de quantités du type $\cos k\theta$ et/ou $\sin k\theta$.