Table des matières

I Le corps des nombres complexes . . . 2
I.1 Définition de C . . . 2
I.2 Notation cartésienne . . . 2
I.3 Conjugaison . . . 3
I.4 Module . . . 4
I.5 Fonctions à valeurs complexes . . . 5
I.6 Le plan complexe . . . 5
II Argument, exponentielle complexe . . . 6
II.1 Notation exp(i theta) . . . 6
II.2 Formules de Moivre et d'Euler . . . 6
II.3 Forme trigonométrique . . . 7
II.4 Fonction exponentielle complexe . . . 8
III Equations polynômiales dans C . . . 9
III.1 Théorème de d'Alembert . . . 9
III.2 Racines carrées d'un nombre complexe non nul . . . 9
III.3 Equation du second degré . . . 9
III.4 Racines N-ièmes d'un nombre complexe non nul . . . 10
III.5 Racines N-ièmes de l'unité . . . 10
IV Trigonométrie . . . 12
IV.1 Applications sinus et cosinus . . . 12
IV.2 Applications tangente et cotangente . . . 14
IV.3 Linéarisation . . . 15
IV.4 Opération inverse de la linéarisation . . . 16

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

I Le corps des nombres complexes

I.1 Définition de C

Définition

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des deux lois suivantes :

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ (x,y)(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx') \end{cases}$$

Proposition

Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ possède une structure de corps. Plus précisément :

- Le neutre pour la loi $+$ est $(0,0)$.
- L'opposé de (x,y) est $(-x,-y)$.
- Le neutre pour le produit est $(1,0)$.
- Pour tout $z=(x,y)$ non nul, l'inverse de z est : $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

Définition

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec les deux lois précédentes.

Ses éléments $z=(x,y)$ sont appelés *nombres complexes*.

Proposition

L'ensemble $\mathbb{K} = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

L'application $f : x \to (x,0)$ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K}$.

Conséquence

De cette manière $(\mathbb{R},+,\times)$ apparait comme un sous-corps de $(\mathbb{C},+,\times)$.

Cet isomorphisme permet d'identifier le complexe $(x,0)$ avec le réel x.

I.2 Notation cartésienne

Dans le corps $(\mathbb{C},+,\times)$, on note $i=(0,1)$.

Pour tout $z=(x,y)$ de $\mathbb{C}$, on constate que $z=(x,0)+(0,1)(y,0)$.

Avec l'identification de $\mathbb{R}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut écrire : $z=x+iy$.

On a ainsi obtenu la notation *cartésienne* (ou *algébrique*) des nombres complexes.

Définition

Pour tout z de $\mathbb{C}$, il existe un couple unique (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $z=x+iy$.

Le réel x est appelé *partie réelle* de z et est noté $\mathrm{Re}\,(z)$.

Le réel y est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\mathrm{Im}\,(z)$.

Un nombre complexe z est dit *réel* si $\mathrm{Im}\,(z)=0$.

z est dit *imaginaire pur* si $\mathrm{Re}\,(z)=0$, c'est-à-dire si $z=iy$, avec y réel.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

Remarques

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Les lois de $\mathbb{C}$ s'écrivent maintenant : $\begin{cases} z + z' = (x + x') + i(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{cases}$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ (on *identifie* les parties réelles et les parties imaginaires.)

En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (attention à vérifier que x et y sont réels !).

Puissances du nombre i

On constate que $i^2 = -1$. Donc $\dfrac{1}{i} = -i$.

En fait, $z^2 = -1 \Leftrightarrow z \in \{i, -i\}$.

Plus généralement $i^3 = -i$, et $i^4 = 1$.

Le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par i est cyclique d'ordre 4 : $(i) = \{1, i, -1, -i\}$.

Remarque

Si ω est un complexe non réel, alors on peut encore effectuer l'identification suivante :
$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 : x + \omega y = x' + \omega y' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

I.3 Conjugaison

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.

Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le *conjugué* de z.

On nomme *conjugaison* l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $z \to \overline{z}$.

Proposition

La conjugaison est un automorphisme involutif du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cela signifie que :

- $\overline{1} = 1$; $\quad \forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.
- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad$ et $\quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

Propriétés

- Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$, $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} \quad$ et $\quad \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$
- Pour tout z complexe : $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \quad$ et $\quad \mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

I.4 Module

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
On appelle *module* de z la quantité, notée $|z|$, égale à $\sqrt{x^2+y^2}$.

Remarques

On constate que $z\overline{z} = |z|^2$ (utile pour se "débarrasser" du module).

En particulier, si z est non nul, l'inverse de z est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue.

Les notations $|\ |$ (valeur absolue ou module) sont donc compatibles.

Propriétés

L'application "module" vérifie les propriétés suivantes, pour tous (z, z') de $\mathbb{C}^2$:

– $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|zz'| = |z|\,|z'|$.
Si z est non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

– $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Il y a égalité $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.
$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'|$. Si $|z| \leq k < 1$, alors $1 - k \leq |1 + z| \leq 1 + k$.

– $\forall\, (u, v) \in \mathbb{C}^2, |u + v|^2 = |u|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |v|^2$.

– $\forall\, z \in \mathbb{C}, \max(|\mathrm{Re}\,(z)|, |\mathrm{Im}\,(z)|) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|$.

Généralisation

Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$: $\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$ et $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

En particulier $\forall\, n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

On a $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow$ les z_k sont produits de l'un d'entre eux par des réels positifs.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Pour tout z de $\mathcal{U}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Proposition *(Distance dans $\mathbb{C}$)*

Soit d l'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2, d(z, z') = |z - z'|$.
d est une *distance* sur $\mathbb{C}$, ce qui signifie qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous nombres complexes u, v et w :

– $d(u, v) \geq 0$; $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$; $d(u, v) = d(v, u)$.

– $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité triangulaire.)

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

I.5 Fonctions à valeurs complexes

Soit X un ensemble quelconque non vide.

$\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des applications définies sur X et à valeurs complexes.

Le plus souvent X désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, ou l'ensemble $\mathbb{N}$ (dans ce dernier cas, on obtient l'ensemble des suites à valeurs complexes).

On sait que $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ est un anneau commutatif pour les lois déduites de $\mathbb{C}$, et définies par :

$$\forall\,(f,g)\in\mathcal{F}(X,\mathbb{C}),\forall\,x\in X:\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\(fg)(x)=f(x)g(x)\end{cases}$$

Le neutre de $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ pour la loi $+$ (resp. la loi $\times$) est l'application constante 0 (resp. 1).

Si f appartient à $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$, on définit les éléments $\mathrm{Re}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$, $\overline{f}$ et $|\,f\,|$ de $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$:

$$\forall\,x\in X:\begin{cases}\mathrm{Re}\,(f)(x)=\mathrm{Re}\,(f(x)) & \mathrm{Im}\,(f)(x)=\mathrm{Im}\,(f(x))\\ \overline{f}(x)=\overline{f(x)} & |\,f\,|(x)=|\,f(x)\,|\end{cases}$$

On a, pour les opérations "partie réelle", "partie imaginaire", "conjugaison" et "module", des propriétés dans $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ analogues à celles qui ont été rencontrées dans $\mathbb{C}$.

I.6 Le plan complexe

Définition

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0,e_1,e_2)$.

L'application qui à $z=x+iy$ (x,y réels) associe le point M de coordonnées (x,y) est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.

On dit que M est le *point image* de z, ou encore que z est l'*affixe* de M.

On note $M(z)$ pour désigner simultanément M et son affixe z.

Le plan $\mathcal{P}$, muni de cette correspondance, est appelé le *plan complexe*.

Le vecteur $OM=xe_1+ye_2$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $z=x+iy$ (et on dit que z est l'affixe de ce vecteur).

Remarques

- $|\,z\,|$ est la distance $d(O,M)$ (ou la norme du vecteur OM).
  Un argument de z est une mesure de l'angle (Ox,OM).
- L'axe Ox est l'ensemble des points images des nombres réels.
  L'axe Oy est l'ensemble des points images des imaginaires purs.
- Si on se donne deux points $A(a)$ et $M(z)$, le vecteur image de $z-a$ est AM.
  Le module $|\,z-a\,|$ représente la distance $d(A,M)$.
- Le point N image de $a+z$ est le quatrième sommet du parallélogramme $OANM$ bâti sur les points O,A,M.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

II Argument, exponentielle complexe

II.1 Notation exp(i theta)

Définition

Pour tout réel θ, on pose $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Théorème

L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{U}, \times)$ des nombres complexes de module 1, de noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, |\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$.
- $\forall\,(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\varphi} = \mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)}$.
- $\forall\, z \in \mathcal{U}$ (càd $|\,z\,| = 1$), $\exists\,\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = z$.
- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ (2\pi)$.

Propriétés

- L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est 2π-périodique : $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\varphi} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, \theta - \varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv \varphi\ (2\pi)$.
- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$.
- Valeurs particulières :
  $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i$, $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$, $\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -i$, $\mathrm{e}^{i2\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II.2 Formules de Moivre et d'Euler

Proposition *(Formule de Moivre)*

Pour tout réel θ, et pour tout entier n : $(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
Autrement dit : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Proposition *(Formules d'Euler)*

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.

Utilisation

- "Moivre" permet, en développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et/ou $\sin\theta$.
- Les formules d'Euler permettent, par utilisation de la formule du binôme et regroupement des termes équidistants des extrémités, de *linéariser* $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$, pour $n \geq 2$, c'est-à-dire de les exprimer en fonction de quantités du type $\cos k\theta$ et/ou $\sin k\theta$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.