Table des matières

I Le corps des nombres complexes

I.1 Définition de C

Définition

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des deux lois suivantes :

$$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ (x,y)(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx') \end{cases}$$

Proposition

Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ possède une structure de corps. Plus précisément :

- Le neutre pour la loi $+$ est $(0,0)$.
- L'opposé de (x,y) est $(-x,-y)$.
- Le neutre pour le produit est $(1,0)$.
- Pour tout $z=(x,y)$ non nul, l'inverse de z est : $\dfrac{1}{z} = (\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2})$.

Définition

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec les deux lois précédentes.
Ses éléments $z=(x,y)$ sont appelés *nombres complexes*.

Proposition

L'ensemble $\mathbb{K} = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
L'application $f : x \to (x,0)$ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K}$.

Conséquence

De cette manière $(\mathbb{R},+,\times)$ apparait comme un sous-corps de $(\mathbb{C},+,\times)$.
Cet isomorphisme permet d'identifier le complexe $(x,0)$ avec le réel x.

I.2 Notation cartésienne

Dans le corps $(\mathbb{C},+,\times)$, on note $i=(0,1)$.

Pour tout $z=(x,y)$ de $\mathbb{C}$, on constate que $z=(x,0)+(0,1)(y,0)$.

Avec l'identification de $\mathbb{R}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut écrire : $z = x+iy$.

On a ainsi obtenu la notation *cartésienne* (ou *algébrique*) des nombres complexes.

Définition

Pour tout z de $\mathbb{C}$, il existe un couple unique (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $z=x+iy$.
Le réel x est appelé *partie réelle* de z et est noté $\mathrm{Re}\,(z)$.
Le réel y est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\mathrm{Im}\,(z)$.
Un nombre complexe z est dit *réel* si $\mathrm{Im}\,(z)=0$.
z est dit *imaginaire pur* si $\mathrm{Re}\,(z)=0$, c'est-à-dire si $z=iy$, avec y réel.

Remarques

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Les lois de $\mathbb{C}$ s'écrivent maintenant : $\begin{cases} z + z' = (x + x') + i(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{cases}$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ (on *identifie* les parties réelles et les parties imaginaires.)

En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (attention à vérifier que x et y sont réels !).

Puissances du nombre i

On constate que $i^2 = -1$. Donc $\dfrac{1}{i} = -i$.

En fait, $z^2 = -1 \Leftrightarrow z \in \{i, -i\}$.

Plus généralement $i^3 = -i$, et $i^4 = 1$.

Le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par i est cyclique d'ordre 4 : $(i) = \{1, i, -1, -i\}$.

Remarque

Si ω est un complexe non réel, alors on peut encore effectuer l'identification suivante :
$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 : x + \omega y = x' + \omega y' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

I.3 Conjugaison

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le *conjugué* de z.
On nomme *conjugaison* l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $z \rightarrow \overline{z}$.

Proposition

La conjugaison est un automorphisme involutif du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.
Cela signifie que :

- $\overline{1} = 1$; $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.
- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Propriétés

- Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$, $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$
- Pour tout z complexe : $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

I.4 Module

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
On appelle *module* de z la quantité, notée $|\,z\,|$, égale à $\sqrt{x^2+y^2}$.

Remarques

On constate que $z\overline{z} = |\,z\,|^2$ (utile pour se "débarrasser" du module).

En particulier, si z est non nul, l'inverse de z est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|\,z\,|^2}$.

Si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue.

Les notations $|\ |$ (valeur absolue ou module) sont donc compatibles.

Propriétés

L'application "module" vérifie les propriétés suivantes, pour tous (z, z') de $\mathbb{C}^2$:

– $|\,z\,| \geq 0$; $|\,z\,| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|\,zz'\,| = |\,z\,|\,|\,z'\,|$.
  Si z est non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|\,z'\,|}{|\,z\,|}$.

– $|\,z+z'\,| \leq |\,z\,| + |\,z'\,|$. Il y a égalité $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.
  $|\,|\,z\,| - |\,z'\,|\,| \leq |\,z \pm z'\,|$. Si $|\,z\,| \leq k < 1$, alors $1 - k \leq |\,1+z\,| \leq 1+k$.

– $\forall\,(u, v) \in \mathbb{C}^2, |\,u+v\,|^2 = |\,u\,|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |\,v\,|^2$.

– $\forall\, z \in \mathbb{C}, \max(|\,\mathrm{Re}\,(z)\,|, |\,\mathrm{Im}\,(z)\,|) \leq |\,z\,| \leq |\,\mathrm{Re}\,(z)\,| + |\,\mathrm{Im}\,(z)\,|$.

Généralisation

Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$: $\left|\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} |\,z_k\,|$ et $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\,z_k\,|$.

En particulier $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\,z^n\,| = |\,z\,|^n$.

On a $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\,z_k\,| \Leftrightarrow$ les z_k sont produits de l'un d'entre eux par des réels positifs.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
Pour tout z de $\mathcal{U}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Proposition *(Distance dans $\mathbb{C}$)*

Soit d l'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2, d(z, z') = |\,z - z'\,|$.
d est une *distance* sur $\mathbb{C}$, ce qui signifie qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous nombres complexes u, v et w :

– $d(u, v) \geq 0$; $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$; $d(u, v) = d(v, u)$.
– $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité triangulaire.)

I.5 Fonctions à valeurs complexes

Soit X un ensemble quelconque non vide.

$\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des applications définies sur X et à valeurs complexes.

Le plus souvent X désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, ou l'ensemble $\mathbb{N}$ (dans ce dernier cas, on obtient l'ensemble des suites à valeurs complexes).

On sait que $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est un anneau commutatif pour les lois déduites de $\mathbb{C}$, et définies par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}), \forall x \in X : \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$$

Le neutre de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ pour la loi $+$ (resp. la loi $\times$) est l'application constante 0 (resp. 1).

Si f appartient à $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, on définit les éléments $\mathrm{Re}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$, $\overline{f}$ et $|\,f\,|$ de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$:

$$\forall x \in X : \begin{cases} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(f(x)) & \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(f(x)) \\ \overline{f}(x) = \overline{f(x)} & |\,f\,|(x) = |\,f(x)\,| \end{cases}$$

On a, pour les opérations “partie réelle”, “partie imaginaire”, “conjugaison” et “module”, des propriétés dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ analogues à celles qui ont été rencontrées dans $\mathbb{C}$.

I.6 Le plan complexe

Définition

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0, e_1, e_2)$.

L'application qui à $z = x + iy$ (x, y réels) associe le point M de coordonnées (x, y) est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.

On dit que M est le *point image* de z, ou encore que z est l'*affixe* de M.

On note $M(z)$ pour désigner simultanément M et son affixe z.

Le plan $\mathcal{P}$, muni de cette correspondance, est appelé le *plan complexe*.

Le vecteur $OM = xe_1 + ye_2$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $z = x + iy$ (et on dit que z est l'affixe de ce vecteur).

Remarques

– $|\,z\,|$ est la distance $d(O, M)$ (ou la norme du vecteur OM).
  Un argument de z est une mesure de l'angle (Ox, OM).

– L'axe Ox est l'ensemble des points images des nombres réels.
  L'axe Oy est l'ensemble des points images des imaginaires purs.

– Si on se donne deux points $A(a)$ et $M(z)$, le vecteur image de $z - a$ est AM.
  Le module $|\,z - a\,|$ représente la distance $d(A, M)$.

– Le point N image de $a + z$ est le quatrième sommet du parallélogramme $OANM$ bâti sur les points O, A, M.

II Argument, exponentielle complexe

II.1 Notation exp(i theta)

Définition

Pour tout réel θ, on pose $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Théorème

L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{U}, \times)$ des nombres complexes de module 1, de noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, |\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$.
- $\forall\,(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\varphi} = \mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)}$.
- $\forall\,z \in \mathcal{U}$ (càd $|\,z\,| = 1$), $\exists\,\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = z$.
- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ (2\pi)$.

Propriétés

- L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est 2π-périodique : $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\varphi} \Leftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{Z}, \theta - \varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv \varphi\ (2\pi)$.
- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$.
- Valeurs particulières :
  $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i, \qquad \mathrm{e}^{i\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{i3\pi/2} = -i, \qquad \mathrm{e}^{i2\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II.2 Formules de Moivre et d'Euler

Proposition *(Formule de Moivre)*

Pour tout réel θ, et pour tout entier n : $(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
Autrement dit : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \forall\,n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Proposition *(Formules d'Euler)*

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.

Utilisation

- "Moivre" permet, en développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et/ou $\sin\theta$.
- Les formules d'Euler permettent, par utilisation de la formule du binôme et regroupement des termes équidistants des extrémités, de *linéariser* $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$, pour $n \geq 2$, c'est-à-dire de les exprimer en fonction de quantités du type $\cos k\theta$ et/ou $\sin k\theta$.