



Table des matières

| | | |
|-----|---|----|
| I | Fonctions logarithmes et exponentielles | 2 |
| II | Fonctions hyperboliques | 6 |
| III | Trigonométrie hyperbolique | 7 |
| IV | Fonctions circulaires réciproques | 9 |
| V | Fonctions hyperboliques réciproques | 12 |

I Fonctions logarithmes et exponentielles

Définition (logarithme népérien)

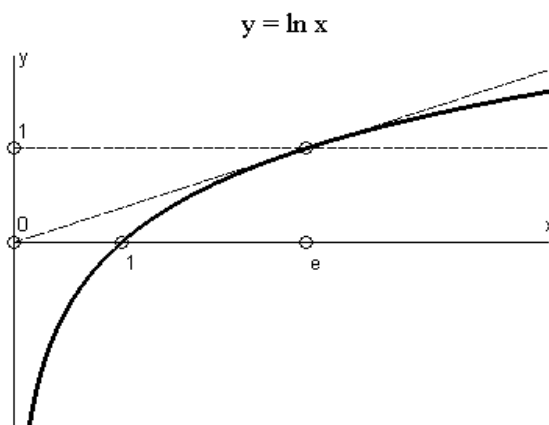
On appelle fonction *logarithme népérien*, et on note $x \mapsto \ln x$, la primitive sur \mathbb{R}^{+*} et qui s'annule en $x = 1$ de l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$. Autrement dit : $\forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Propriétés

- L'application \ln est définie sur \mathbb{R}^{+*} par $\forall x > 0, \ln' x = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.
- Cette application est strictement croissante et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .
- Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y, \ln \frac{1}{x} = -\ln x, \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.
Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a : $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.

$$\text{– Limites usuelles : } \begin{cases} \lim_{0^+} \ln x = -\infty & \lim_{+\infty} \ln x = +\infty & \lim_{0^+} x \ln x = 0^- \\ \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ & \lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \lim_1 \frac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0 & \lim_{0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 & \lim_{+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \end{cases}$$

- L'application $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} .
On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln e = 1$. On a : $e \approx 2.718281828$.
- L'application $x \mapsto \ln x$ est concave (sa dérivée seconde est $-\frac{1}{x^2} < 0$).
Pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ (avec égalité $\Leftrightarrow x = 1$.)
- Courbe représentative :



Remarques

- Si x, y sont deux réels non nuls et de même signe, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$.
En particulier, pour tout $x \neq 0$, on a : $\ln x^2 = 2 \ln|x|$.
- L'application $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur \mathbb{R}^* et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- Soit f une application dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans \mathbb{R}^* .
On appelle *dérivée logarithmique* de f la dérivée $\frac{f'}{f}$ de l'application $\ln|f|$.

- Soient f_1, f_2, \dots, f_n des applications dérivables et strictement positives sur l'intervalle I . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels, et $g = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$. Alors la dérivée logarithmique de g est $\frac{g'}{g} = \alpha_1 \frac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \frac{f_2'}{f_2} + \dots + \alpha_n \frac{f_n'}{f_n}$.
- La dérivée logarithmique peut donc être un moyen commode de calculer la dérivée d'une application qui s'exprime essentiellement à l'aide de quotients, de produits, de puissances. Soit par exemple $f : x \mapsto \sqrt{|x(x+2)|} \exp \frac{1}{x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$. Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln |x(x+2)| + \frac{1}{x}$. En dérivant, on obtient : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)}$. Ainsi $f' = \frac{x^2-2}{x(x+2)} f$. En redérivant sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on trouve l'expression de f'' :

$$f''(x) = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) + \frac{-x^4+6x^2+8x}{x^4(x+2)^2} f(x)$$

$$= \frac{(x^2-2)^2 + (-x^4+6x^2+8x)}{x^4(x+2)^2} f(x) = \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x)$$
 On pourra comparer ce calcul de f'' avec celui obtenu par les méthodes habituelles de dérivation (où la présence d'une valeur absolue n'arrange rien).

Définition (fonction exponentielle)

- || On sait que l'application $x \mapsto \ln x$ est une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} .
- || La bijection réciproque est appelée *fonction exponentielle* et est notée $x \mapsto \exp x$.

Propriétés

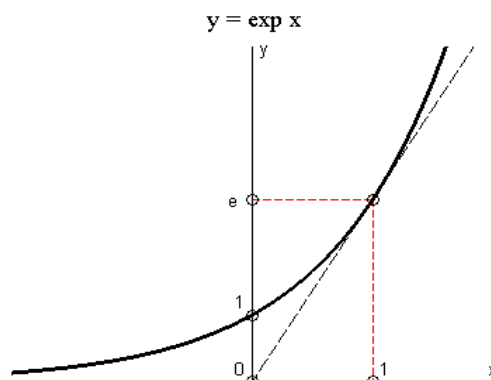
- L'application $x \mapsto \exp x$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^{+*} , continue et strictement croissante. On a l'équivalence : $\begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$
- L'application $x \mapsto \exp x$ est dérivable sur \mathbb{R} et : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp' x = \exp x$. Plus généralement, $x \mapsto \exp x$ est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et : $\forall n \in \mathbb{N}, \exp^{(n)} = \exp$.
- Propriétés fonctionnelles : Pour tous x, y on a : $\exp(x+y) = \exp x \exp y$ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$, $\exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}$.
- L'application $x \mapsto \exp x$ est convexe sur \mathbb{R} (sa dérivée seconde est $\exp x > 0$). Pour tout x de \mathbb{R} , on a l'inégalité $\exp(x) \leq 1+x$ (égalité $\Leftrightarrow x=0$.)
- Limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim_{-\infty} \exp x = 0^+ & \lim_{+\infty} \exp x = +\infty & \lim_{+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty \\ \lim_{-\infty} x \exp x = 0 & \lim_0 \frac{\exp x - 1}{x} = 1 \\ \forall \alpha, \beta > 0 & \lim_{-\infty} |x|^\alpha \exp^\beta x = 0 & \lim_{+\infty} \frac{\exp^\beta x}{x^\alpha} = +\infty \end{cases}$$
- Notation $x \mapsto e^x$: Pour tout n de \mathbb{N} , on a $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$.

Cette propriété se généralise aux exposants rationnels.

On décide d'étendre encore cette définition en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \exp x$.

On définit ainsi les puissances de e avec exposant réel quelconque. Toutes les propriétés de la fonction exponentielle peuvent alors se réécrire en utilisant cette notation.

– Courbe représentative :



Définition (fonctions exponentielles de base quelconque)

|| Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x , on pose $a^x = \exp(x \ln a)$.

|| L'application $x \mapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a* .

Définition (fonctions puissances)

|| Soit α un nombre réel quelconque. On appelle *fonction puissance d'exposant α* l'application définie sur \mathbb{R}^{+*} par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Propriétés des fonctions exponentielles

– Pour $a = e$, on retrouve l'application $x \mapsto \exp x$, déjà notée $x \mapsto e^x$.

L'application $x \mapsto \exp x = e^x$ est donc l'application exponentielle de base e .

– La notation a^x étend la définition de a^r pour tout rationnel r .

– Pour tout réel $a > 0$, l'application $x \mapsto a^x$ est définie et continue sur \mathbb{R} .

Elle est même indéfiniment dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (\ln a)a^x$.

– L'application $x \mapsto a^x$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décroissante si } 0 < a < 1 \\ \text{constante égale à } 1 \text{ si } a = 1 \end{cases}$

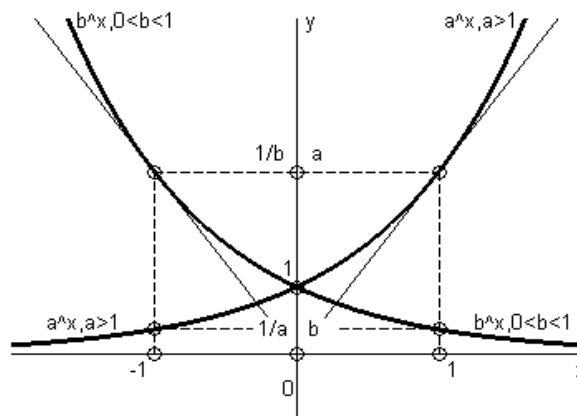
– Si $a \neq 1$, l'application $x \mapsto a^x$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^{+*} .

La bijection réciproque est $x \mapsto \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ appelée fonction logarithme de base a .

Ainsi la fonction logarithme de base 10 est définie sur \mathbb{R}^{+*} par $\log_{10} x = \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ et elle est la bijection réciproque de l'application $x \mapsto 10^x$.

– Pour tout x de \mathbb{R} et tout $a > 0$, on a $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

– Courbes représentatives :



Propriétés des fonctions puissances

– Quant l'exposant α est entier ou rationnel, cette définition de l'application $x \mapsto x^\alpha$ est compatible avec celle qu'on connaissait déjà (sur un domaine parfois plus large que \mathbb{R}^{+*}).

– La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
 Sur son domaine \mathbb{R}^{+*} , l'application $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } \alpha > 0 \\ \text{strictement décroissante si } \alpha < 0 \\ \text{constante en 1 si } \alpha = 0 \end{cases}$

– Si $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur lui-même, dont la bijection réciproque est l'application $x \mapsto x^{1/\alpha}$

– Si $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité à l'origine en lui donnant la valeur 0. En $(0, 0)$, la courbe présente alors une tangente horizontale si $\alpha > 1$ et verticale si $0 < \alpha < 1$. Toutes les courbes représentatives des applications $x \mapsto x^\alpha$ passent par le point $(1, 1)$.

– Le placement des différentes courbes est le suivant :

$$\forall x > 0, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } \alpha < \beta : \begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } x^\alpha > x^\beta \\ \text{Si } x > 1 \text{ alors } x^\alpha < x^\beta \end{cases}$$

– Courbes représentatives :

