Table des matières

I Quelques rappels 2
II Méthodes de calcul des intégrales 2
III Tableau de primitives usuelles 3
IV Compléments sur le calcul des primitives 4

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Dans cette section, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.

I Quelques rappels

Définition *(primitive sur un intervalle)*

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si, pour tout x de I : $F'(x) = f(x)$.

Proposition *(relation entre les primitives d'une même fonction)*

Soit f une application I dans $\mathbb{R}$ admettant une primitive F sur I.

Soit G une application de I dans $\mathbb{R}$. G est une primitive de f sur $I \Leftrightarrow$ il existe une constante λ telle que, pour tout x de I, $G(x) = F(x) + \lambda$.

Proposition *(primitive prenant une valeur donnée en un point donné)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, admettant une primitive F sur I. Soient a dans I et λ dans $\mathbb{R}$.

Il y a une seule primitive G de f telle que $G(a) = \lambda$. Elle est donnée par $G = F - F(a) + \lambda$.

En particulier, $H = F - F(a)$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Proposition *(expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive quelconque)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue.

Pour toute primitive F de f, on a : $\forall\,(a,b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

II Méthodes de calcul des intégrales

Dans toute la suite, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne l'ensemble des primitives de f sur I.

Proposition *(intégration par parties)*

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\displaystyle\int fg' = fg - \int f'g$.

Proposition *(intégrations par parties répétées)*

Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

On a alors l'égalité : $\displaystyle\int fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)} g^{(n-1-k)} + (-1)^n \int f^{(n)} g$.

Exemples

- Si $n = 2$: $\displaystyle\int fg'' = fg' - f'g + \int f''g$.
- Si $n = 3$: $\displaystyle\int fg''' = fg'' - f'g' + f''g - \int f'''g$.

Proposition *(changement de variable)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue.

Soit $\varphi : J \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(J) \subset I$.

Alors, pour tous points a et b de J, on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^b (f \circ \varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

III Tableau de primitives usuelles

Les résultats qui figurent dans le tableau suivant doivent être parfaitement connus.

$f(x)$	$F(x)$	sur	$f(x)$	$F(x)$	sur
$x^\alpha,\ (\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^{-*}, \mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$x \neq \pm 1$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$\mathbb{R}$
$a^x\ (a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert$	$\lvert x\rvert > 1$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$	$x \neq k\pi$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{th}\, x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotan}\, x$	$x \neq k\pi$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$-\coth x$	$\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{-*}$

On peut généraliser quelques-uns des résultats ci-dessus, notamment :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\lambda\ ; \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+\lambda$$

Exemples de situations classiques

$$\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{e}^{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^{\varphi(t)}\Big]_a^b\ ; \quad \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\lvert\varphi(t)\rvert\Big]_a^b\ ; \quad \int_a^b \varphi'(t)\,\varphi^r(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\varphi^{r+1}(t)}{r+1}\right]_a^b$$

Dans $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, on pose $x = \varphi(t) = \sin t$, avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc $\sqrt{1-x^2} = \lvert\cos t\rvert = \cos t$, et $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

D'autre part, quand $x = 0$ alors $t = 0$ et quand $x = 1$ alors $t = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.