Table des matières

Géométrie du plan

Dans cette partie, on va rencontrer les objets traditionnels de la géométrie du plan. La notion de "plan" passe par trois degrés successifs de plus en plus spécialisés : le "plan affine", le "plan affine euclidien" et le "plan affine euclidien orienté".

– **Le plan affine**

  C'est le plan dans lequel on rencontre des *vecteurs*, des *points*, des *droites*.

  On peut munir ce plan d'un *repère cartésien*, par le choix d'un point Ω (l'*origine* du repère) et de deux vecteurs non proportionnels e_1, e_2 (la *base* associée au repère.)

  Tout point (resp. tout vecteur) est alors représenté de manière unique par ses *coordonnées* dans ce repère (resp. ses *composantes* dans cette base.)

  Dans le plan affine, on peut définir des notions comme le *parallélisme* des droites, le *barycentre* d'une famille de *points pondérés*, ou les applications *affines* (caractérisées par le fait qu'elles conservent l'alignement, ou encore qu'elles conservent le barycentre.)

  Parmi ces applications affines, on trouve les *translations*, les *homothéties*, les *symétries* par rapport à un point, ou encore les *symétries* ou les *projections* par rapport ou sur une droite, parallèlement à une droite non parallèle.

– **Le plan affine euclidien**

  On définit un produit scalaire sur les vecteurs du plan, et la norme associée. On peut alors parler de vecteurs orthogonaux ou unitaires, et de droites orthogonales.

  On introduit également les bases et les repères orthonormés du plan.

  La norme associée au produit scalaire permet de définir la distance entre points du plan, qui permet à son tour d'imaginer des lieux du plan et d'en étudier les propriétés : cercles, médiatrices, triangles isocèles ou rectangles, coniques définies par foyer et directrice, etc.

  On définit les *isométries* du plan (applications affines *conservant les distances*.) Les translations, rotations, et les symétries orthogonales par rapport à une droite sont des isométries.

  Les *similitudes* du plan sont les applications affines qui "multiplient les distances" par un facteur constant. Les plus simples d'entre elles sont les homothéties.

– **Le plan affine euclidien orienté**

  En privilégiant le *sens trigonométrique* comme sens "positif", on définit les *mesures d'angles* dans le plan (mesures de l'angle d'une rotation, de deux vecteurs, de deux droites), et on distingue les bases orthonormées du plan selon qu'elles sont *directes* ou *indirectes*.

  Les isométries sont classées en *déplacements* ou *antidéplacements* selon qu'elles "conservent" ou "inversent" l'orientation. On distingue de même les similitudes *directes* ou *indirectes*.

  L'orientation du plan permet d'étudier les propriétés angulaires de certains lieux (cercles, coniques, etc.), ou de repérer les points dans un système de *coordonnées polaires*.

– **Identification de $\mathcal{P}$, $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{C}$.**

  Si on choisit un repère orthonormé direct (O, e_1, e_2) du plan affine $\mathcal{P}$, on peut alors identifier (au moyen d'une bijection évidente) les ensembles $\mathcal{P}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

  Le vecteur $u = xe_1 + ye_2$ et le point M défini par $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$ sont identifiés au couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ et au nombre complexe $z = x + iy$. On dit que M (resp. u) est le *point image* (resp. le *vecteur image*) de z, et que z est l'*affixe* de M et de u. On notera $M(z)$ et $u(z)$.

Les notions de géométrie du plan vues en classe terminale seront supposées connues. On ne propose pas ici de les redéfinir, mais de les replacer dans une progression (chrono)logique.
On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé direct (O, e_1, e_2) désigné sous le nom de *repère canonique*.

On notera $A(x, y)$ pour désigner un point quelconque A de coordonnées (x, y) dans ce repère et $u(x, y)$ pour désigner un vecteur quelconque u de composantes (x, y) dans la base (e_1, e_2). Ce point A et ce vecteur u sont donc définis par $\overrightarrow{OA} = u = xe_1 + ye_2$.

I Le plan affine

Les notions qui suivent sont purement affines, ce qui signifient qu'elles ne font pas intervenir les concepts de produit scalaire, de distance, d'orientation, etc.

I.1 Combinaisons linéaires, bases du plan

- Opérations sur les vecteurs du plan

  L'ensemble des vecteurs du plan est muni d'une addition, et d'une multiplication par les scalaires : pour tous vecteurs $u(x, y)$ et $v(x', y')$, et pour tout réel λ, le vecteur $u + v$ a pour composantes $(x + x', y + y')$ et le vecteur λu a pour composantes $(\lambda x, \lambda y)$.

  On dit que u et v sont *colinéaires* (ou encore *linéairement dépendants*, ou *liés*) s'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$ ou $u = \lambda v$. Dans le cas contraire, on dit que u et v ne sont pas colinéaires (ou *linéairement indépendants*, ou *libres*.)
- Combinaisons linéaires

  Soit $(u_k)_{1\le k\le n}$ une famille de n vecteurs et $(\lambda_k)_{1\le k\le n}$ une famille de n réels.

  On dit que $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ est une *combinaison linéaire* des u_k avec les *coefficients* λ_k.
- Bases du plan

  Soient u, v deux vecteurs linéairement indépendants.

  Tout vecteur w s'écrit d'une manière unique sous la forme $w = \alpha u + \beta v$ (α, β dans $\mathbb{R}$) c'est-à-dire comme une combinaison linéaire de u et v.

  On dit alors que u, v forment une *base* du plan, et que α, β sont les *composantes* (ou encore les *coordonnées*) de w dans cette base.
- Interprétation avec les nombres complexes

  Les opérations entre vecteurs du plan sont "compatibles" avec celles sur leurs affixes.

  Par exemple, soit $(u_k)_{1\le k\le n}$ une famille de n vecteurs et $(\lambda_k)_{1\le k\le n}$ une famille de n réels.

  Si on note z_k l'affixe de chaque u_k, alors celui de $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ est $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k$.

  Dire que les vecteurs non nuls $u_1(z_1)$ et $u_2(z_2)$ sont libres, c'est dire que le rapport z_2/z_1 n'est pas réel, ou encore que $\arg z_2 \ne \arg z_1$ $[\pi]$, ou encore que $\overline{z_1}\, z_2 \ne \overline{z_2}\, z_1$. Tout nombre complexe z s'écrit alors de manière unique $z = az_1 + bz_2$, avec (a, b) dans $\mathbb{R}^2$.

  Par exemple, si ω est un nombre complexe non réel, tout z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + \omega b$, avec (a, b) dans $\mathbb{R}^2$. Il est notamment possible de procéder à une identification $a + \omega b = c + \omega d \Rightarrow a = c$ et $b = d$ quand a, b, c, d sont réels.

I.2 Translations, homothéties

– Transformations du plan

Toute application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ peut être définie en exprimant les coordonnées (X, Y) du point $M = f(m)$ en fonction des coordonnées (x, y) de m.
La définition de f peut alors prendre la forme d'un système $\begin{cases} X = \varphi(x, y) \\ Y = \psi(x, y) \end{cases}$.

On peut également décrire l'affixe Z de M en fonction de l'affixe z de m.
On parlera alors de l'application $f : m(z) \mapsto M(Z)$.

On dit qu'une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est une une *transformation* du plan si f est bijective.

L'application $f : m(z) \mapsto M(Z)$ (avec $Z = \varphi(z)$) est une transformation du plan si et seulement si φ est une bijection de $\mathbb{C}$. La transformation inverse de f est alors celle qui envoie le point m d'affixe z sur le point M d'affixe $Z = \varphi^{-1}(z)$.

– Translations

Pour tout point $A(a, b)$ et tout vecteur $u(x, y)$ on note $A + u$ le point $B(a + x, b + y)$.
L'application $t_u : A \mapsto A + u$ est appelée *translation* de vecteur u.
Pour tous vecteurs u, v, on a : $t_v \circ t_u = t_u \circ t_v = t_{u+v}$, $t_{\overrightarrow{0}} = \text{Id}$, et $(t_u)^{-1} = t_{-u}$.

– Homothéties

Soit A un point et λ dans $\mathbb{R}^*$. L'application f qui à tout point M associe le point $A + \lambda\overrightarrow{AM}$ est appelée *homothétie* de *centre* A et de *rapport* λ, et elle est notée $h(A, \lambda)$.

Si $\lambda = 1$, on trouve $f = \text{Id}$, et le point A peut être choisi quelconque, tandis que si $\lambda \neq 1$, alors A est l'unique point invariant de f (on parle du *point fixe* de f.)

On a bien sûr les égalités $h(A, \lambda) \circ h(A, \mu) = h(A, \lambda\mu)$ et $h(A, \lambda)^{-1} = h(A, 1/\lambda)$.

L'application $h(A, -1)$ est appelée *symétrie centrale* par rapport au point A.

– Dilatations (homothéties-translations)

On dit qu'une application f du plan dans lui même est une *dilatation* (ou une *homothétie-translation*) si elle est une homothétie ou si elle est une translation.

Proposition

> Une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est une dilatation si et seulement si il existe un scalaire λ non nul, nécessairement unique et appelée *rapport* de la dilatatation, tel que, pour tous points M_1 et M_2 on ait l'égalité $\overrightarrow{f(M_1)f(M_2)} = \lambda\overrightarrow{M_1M_2}$: si $\lambda = 1$ alors f est une translation, sinon f est une homothétie de rapport λ.

Proposition

> Les dilatations sont des transformations du plan. La composée de deux dilatations de rapports λ et μ est une dilatation de rapport $\lambda\mu$, et l'inverse d'une dilatation de rapport λ est une dilatation de rapport $1/\lambda$.

– Interprétation avec les nombres complexes

La translation de vecteur u d'affixe ω est la transformation $f : m(z) \mapsto M(Z = z + \omega)$.

L'homothétie de centre $A(a)$ et de rapport λ est $f : m(z) \mapsto M(Z = a + \lambda(z - a))$.

Les dilatations sont les transformations $f : m(z) \mapsto M(Z = \lambda z + \omega)$, avec λ dans $\mathbb{R}^*$ (c'est le rapport de la dilatation) et ω dans $\mathbb{C}$ (c'est l'affixe de l'image de O.)
Si $\lambda \neq 1$, donc si f est une homothétie, le centre de f est le point A d'affixe $a = \omega/(1 - \lambda)$.

I.3 Barycentres

– Barycentre d'une famille de points pondérés

Soit A dans $\mathcal{P}$ et λ dans $\mathbb{R}$. Le couple (A, λ) est appelé *point pondéré* de poids λ.

On dit que $m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k$ est le *poids total* de la famille $(A_k, \lambda_k)_{1\le k\le p}$ de p points pondérés.

Si $m \neq 0$, le point G défini $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\overrightarrow{OA_k}$ est appelé le *barycentre* des (A_k, λ_k).

Le barycentre de la famille des points pondérés(A_k, λ_k) est caractérisé par $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\overrightarrow{GA_k} = \overrightarrow{0}$.

On a également l'égalité $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\overrightarrow{\Omega A_k}$ pour tout point Ω de $\mathcal{P}$.

Cette propriété justifie qu'on écrive plus simplement $G = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k A_k$.

– Remarques et propriétés

- Parler du barycentre d'une famille de points de poids total nul n'a aucun sens.
- Si (x_k, y_k) sont les coordonnées des A_k, celles de G sont $x = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$ et $y = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k y_k$.
  On ne modifie pas G en multipliant les poids λ_k par $\mu \neq 0$, notamment $\mu = \frac{1}{m}$.
  Cela permet de se ramener à $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$ et d'écrire $G = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k A_k$.
  Si les poids λ_k sont égaux, on parle de l'*isobarycentre* (ou *équibarycentre*) $G = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} A_k$.
- Quand on cherche un barycentre, on peut remplacer certains points (de poids total $m_k \neq 0$) par leur barycentre G_k affecté du coefficient m_k : c'est l'*associativité* du barycentre.

– Exemples

- L'isobarycentre de A, B est le milieu $G = \frac{1}{2}(A + B)$ du segment $[A, B]$.
- L'isobarycentre G de A, B, C est le centre de gravité $G = \frac{1}{3}(A+B+C)$ du triangle ABC.
  Il est aussi le barycentre de $(A, 1), (I, 2)$, où $I = \frac{1}{2}(B + C)$. Autrement dit $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
  Les médianes d'un triangle sont donc concourantes en son centre de gravité G, qui est au deux-tiers de chaque médiane en partant du sommet.
- Quatre points A, B, C, D (dans cet ordre) forment un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
  Cette égalité équivaut à $B - A = C - D$, donc à $\frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$.
  Cela signifie que les diagonales (les segments $[A, C]$ et $[B, D]$) ont même milieu.
  Ce milieu commun I vérifie donc $I = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D) = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$.
  Autrement dit, I est l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D.

– Interprétation avec les nombres complexes.

Soit $(A_k, \lambda_k)_{1\le k\le p}$ une famille de n points pondérés, de barycentre G.

Si on note a_k l'affixe de chaque point A_k, alors l'affixe du point G est $g = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_k$.

L'égalité $\sum_{k=1}^{p} a_k = 0$ exprime que l'isobarycentre des A_k est en O.

– Coordonnées barycentriques

Soient A, B, C trois points non alignés du plan (n'appartenant pas à une même droite affine.) Tout point M est d'une manière unique barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$, avec $\alpha+\beta+\gamma = 1$. On dit que α, β, γ sont les *coordonnées barycentriques* de M dans le *repère affine* A, B, C.

Cette notion (qui est hors-programme) est un moyen efficace de localiser un point M par rapport à trois points non alignés A, B, C, sans qu'aucun de ces points n'ait un rôle privilégié.

Voic comment passer des coordonnées barycentriques aux coordonnées cartésiennes dans, par exemple, le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $M = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$.

De même : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow M = (1 - x - y)A + xB + yC$.

I.4 Droites vectorielles et droites affines

– Droites vectorielles

Soit u un vecteur non nul du plan. L'ensemble $\mathbb{R}u = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est appelée *droite vectorielle* de vecteur directeur u (ou encore *engendrée* par u.)

Deux vecteurs engendrent la même droite vectorielle si et seulement s'ils sont colinéaires.

– Droites affines

Soit A un point du plan, et u un vecteur non nul.

On dit que $\mathcal{D}(A, u) = \{A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la *droite affine* passant par A et dirigée par u.

On dit que la droite affine $\mathcal{D}(A, u)$ a pour *direction* la droite vectorielle $\mathbb{R}u$.

Soit B un point de $D(A, u)$ (on dit que cette droite *passe* par B.) Alors $\mathcal{D}(A, u) = \mathcal{D}(B, u)$.

Les droites vectorielles ne sont autres que les droites affines passant par l'origine.

– Points alignés

On dit que des points de $\mathcal{P}$ sont *alignés* s'ils appartiennent à une même droite affine.

Deux points A, B distincts appartiennent à une seule droite : la droite $\mathcal{D} = (A, \overrightarrow{AB})$.

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés.

Si les trois points A, B, C ne sont pas alignés, on dit qu'ils forment un *vrai triangle.*

– Interprétation avec les nombres complexes.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(a)$ et de vecteur directeur $u(\omega)$.

On a $M(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ z = a + \lambda u \Leftrightarrow (z - a)\overline{u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z\overline{u} - \overline{z}u = a\overline{u} - \overline{a}u$.

Soient (A, a), (B, b), (C, c) trois points du plan, avec $A \neq B$.

A, B, C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} \in \mathbb{R}$ (convient encore si $A = B$.)

– Parallélisme

Deux droites affines sont dites *parallèles* si elles ont la même direction. Dans le cas contraire, elles ont un unique point en commun (on dit alors qu'elles sont *concourantes.*)

Par un point donné, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

L'image d'une droite D par une dilatation est une droite qui lui est parallèle.

– Droites affines et barycentres

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n points d'une même droite affine $\mathcal{D}$, alors leurs barycentres (pour un système quelconque de poids) est encore un point de $\mathcal{D}$. Réciproquement $\mathcal{D}$ est l'ensemble des barycentres de deux points A, B distincts quelconques de $\mathcal{D}$.

– Demi-droites

Soit $A(a)$ un point du plan, et $u(\omega)$ un vecteur non nul.

On dit que $\mathcal{D}^+(A,u) = \{A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ est la *demi-droite* d'origine A et dirigée par u.

On a $M(z) \in \mathcal{D}^+(A,u) \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+,\ z = a + \lambda u \Leftrightarrow \arg(z-a) = \arg u\ (2\pi)$ (Si $M \neq A$.)

– Demi-plans

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur non nul u.

On sait que $M(z)$ est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $\operatorname{Im}((z-a)\overline{u}) = 0$: cette égalité peut être considérée comme l'*équation* de la droite $\mathcal{D}$.

On dit que les ensembles $\{M(z),\ \operatorname{Im}((z-a)\overline{u}) \leq 0\}$ et $\{M(z),\ \operatorname{Im}((z-a)\overline{u}) \geq 0\}$ sont les deux *demi-plans fermés* délimités par la droite $\mathcal{D}$.

Avec des inégalités strictes, on obtient les deux *demi-plans ouverts* délimités par $\mathcal{D}$.

I.5 Parties convexes

Définition *(Segment délimité par deux points)*

Soient A et B deux points quelconques du plan $\mathcal{P}$.
Le *segment* $[A,B]$ est l'ensemble des points $M = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, avec $0 \leq \lambda \leq 1$.
C'est donc l'ensemble des barycentres de $(A, 1-\lambda)$ et (B,λ), avec $0 \leq \lambda \leq 1$, ou encore l'ensemble des barycentres de (A,α) et (B,β), avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$.

Définition *(Parties convexes)*

On dit qu'une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ est *convexe* si : $\forall\,(A,B) \in \mathcal{C}^2,\ [A,B] \subset \mathcal{C}$, c'est-à-dire si $\mathcal{C}$ contient le segment joignant deux quelconques de ses points.

Proposition *(Enveloppe convexe)*

Toute intersection d'ensembles convexes est convexe. Il en découle que toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ est incluse dans une plus petite partie convexe. Celle-ci est l'intersection de tous les convexes de $\mathcal{P}$ qui contiennent $\mathcal{A}$. On l'appelle l'*enveloppe convexe* de $\mathcal{A}$.

Exemples et propriétés

– L'ensemble vide, le plan $\mathcal{P}$, un segment, un singleton, une demi-droite, un demi-plan, sont des ensembles convexes.

  Toute intersection de demi-plans est donc encore un ensemble convexe.

– Si $\mathcal{P}$ est muni de sa structure euclidienne, les disques (ouverts ou fermés) sont convexes.

– Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de l'espace $\mathcal{P}$. Soit G le barycentre d'une famille $A_1, \ldots, A_p$ de points de $\mathcal{C}$, affectés de coefficients ≥ 0. Alors G est encore un élément de $\mathcal{C}$.

– L'enveloppe convexe de trois points A, B, C est la "plaque triangulaire" qu'ils délimitent.

  Celle de p points $A_1, \ldots, A_p$ coplanaires est la "plaque" délimitée par le plus petit polygône convexe contenant ces p points.

– L'enveloppe convexe d'une partie finie $\{A_1, \ldots, A_p\}$ de $\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les barycentres des points A_k affectés de coefficients positifs ou nuls.

I.6 Définition des déterminants d'ordre 2 et 3.

Pour tous couples (a,b) et (a',b') de nombres réels ou complexes on pose $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$.
Cette quantité est appelée *déterminant* des couples (a,b) et (a',b').

On définit de même le déterminant des triplets (a,b,c), (a',b',c'), (a'',b'',c'') de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c$$

On généralisera considérablement ces notions pendant l'année.
Pour l'instant, on se contente de ces définitions et des propriétés suivantes :

– Invariance par "transposition" : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

– Un déterminant est "linéaire" par rapport à ses colonnes (et par rapport à ses lignes).
Par exemple : $\begin{vmatrix} a & \lambda a' + \mu a'' \\ b & \lambda b' + \mu b'' \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix}$

– Un déterminant est changé en son opposé si on échange deux colonnes (ou deux lignes).

– On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne un multiple d'une autre colonne (ou en ajoutant à une ligne un multiple d'une autre ligne.)
Par exemple : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' + \lambda a & a'' \\ b & b' + \lambda b & b'' \\ c & c' + \lambda c & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \mu c & a' + \mu c' & a'' + \mu c'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$

– Déterminants "triangulaires" : $\begin{vmatrix} a & a' \\ 0 & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & b' \end{vmatrix} = ab'$, et $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c''$.

– Important : un déterminant est nul si et seulement si ses colonnes sont liées (c'est-à-dire si l'une d'elles est combinaison linéaire des deux autres.) Idem avec les lignes.

– Soit $\begin{cases} a\,x + b\,y = \lambda \\ a'x + b'y = \lambda' \end{cases}$ ou $\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = \lambda \\ a'x + b'y + c'z = \lambda' \\ a''x + b''y + c''z = \lambda'' \end{cases}$ un système d'inconnues $x, y\,(,z)$.
Par définition, le déterminant du système est $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, ou $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.
Si $\Delta \neq 0$, le système a une solution unique (x,y), ou (x,y,z).
Elle s'écrit $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, où Δ_x (resp. Δ_y, Δ_z) sont les déterminants obtenus en remplaçant dans Δ la colonne des coefficients de x (resp. y, z) par celle des seconds membres.
Ainsi (pour le système 3×3) : $\Delta_x = \begin{vmatrix} \lambda & b & c \\ \lambda' & b' & c' \\ \lambda'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & \lambda & c \\ a' & \lambda' & c' \\ a'' & \lambda'' & c'' \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & \lambda \\ a' & b' & \lambda' \\ a'' & b'' & \lambda'' \end{vmatrix}$.
Ces *formules de Cramer* ont surtout un intérêt théorique pour un système 3×3 : il est souvent plus simple de se ramener à un système triangulaire par la méthode du *pivot de Gauss*.

I.7 Équations de droites, parallélisme, intersections

On rappelle que le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct "canonique" (O, e_1, e_2).
Dans cette section, ce repère pourrait en fait être un repère cartésien quelconque du plan.

– Équations de droites

Une partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ est une droite $\Leftrightarrow$ elle a une équation $ax + by = c$ où $(a, b) \neq (0, 0)$.
Cette équation est unique au produit près par un réel non nul.
Avec ces notations, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $u(b, -a)$.

La droite $\mathcal{D}$ définie par $\begin{cases} A(x_0, y_0) \\ u(\alpha, \beta) \end{cases}$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x_0 & \alpha \\ y & y_0 & \beta \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

L'équation est $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ si $\mathcal{D}$ est définie par $\begin{cases} A(x_0, y_0) \\ B(x_1, y_1) \end{cases}$

Conséquence : $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ sont alignés $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

La droite passant par $A(a, 0)$ et $B(0, b)$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1.$

– Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_0, y_0)$ et dirigée par $u(\alpha, \beta)$.
On a les équivalences : $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M = A + \lambda u \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (S) \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}$
On retrouve une *équation cartésienne* de $\mathcal{D}$ en éliminant λ dans (S).

– Droites parallèles ou sécantes

Les droites $\begin{cases} \mathcal{D} : ax + by = c \\ \mathcal{D}' :\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ sont parallèles (et on note $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$) $\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$

Si $\mathcal{D} \nparallel \mathcal{D}'$, alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = A(x_0, y_0)$, avec $x_0 = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_0 = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (a, b, c) = \lambda(a', b', c')$.

Les droites parallèles à $\mathcal{D}$ ont pour équation $ax + by = h$, avec h dans $\mathbb{R}$.
Les parallèles à (O, e_2) (resp. (O, e_1)) ont donc pour équation $x = \alpha$ (resp. $y = \beta$.)

L'équation d'une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à (O, e_2) peut s'écrire $y = \alpha x + \beta$.

On dit que α est le *coefficient directeur* de la droite $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles à (O, e_2), on a $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont le même coefficient directeur.

– Condition pour que trois droites soient parallèles ou concourantes.

Soit $\mathcal{D} : ax + by = c$, $\mathcal{D}' : a'x + by = c'$ et $\mathcal{D}'' : a''x + b''y = c''$.
Elles sont parallèles ou concourantes $\Leftrightarrow$ leurs équations sont "liées" $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$

– Nombres complexes et équations de droites.

Soient $A(\alpha)$ et $B(\beta)$ deux points distincts de $\mathcal{P}$.
$M(z)$ est sur la droite $\mathcal{D} = (AB)$ si et seulement si $\begin{vmatrix} z & \alpha & \beta \\ \overline{z} & \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

On développe par rapport à la première colonne :
$M(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (\overline{\alpha} - \overline{\beta})z - (\alpha - \beta)\overline{z} + \alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\,\overline{z} + z\,\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} \in \mathbb{R}.$

I.8 Applications affines du plan

On rappelle que le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct "canonique" (O, e_1, e_2).
Dans cette section, ce repère pourrait en fait être un repère cartésien quelconque du plan.

- Applications affines et linéaires dans le plan

  Une application $f : M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ est dite *affine* s'il existe des réels a, b, x_0, c, d, y_0 tels que : $\forall\, M(x, y) \in \mathcal{P}$, $\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = cx + dy + y_0 \end{cases}$.

  Les coefficients a, b, x_0, c, d, y_0 sont définis de façon unique. Par exemple $O'(x_0, y_0) = f(O)$.

  Si $f(O) = O$, c'est-à-dire si $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ pour tout $M(x, y)$, on dit que f est *linéaire.*

  Les applications linéaires sont donc les applications affines qui conservent l'origine.

- Premiers exemples d'applications affines
  - ◇ Les applications constantes : $\begin{cases} x' = x_0 \\ y' = y_0 \end{cases}$ et les translations : $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$
  - ◇ Les homothéties : soit h l'homothétie de centre $\Omega = (x_\Omega, y_\Omega)$ et de rapport $\lambda \neq 0$.

    Elle est définie par $M' = \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M}$ donc par $\begin{cases} x' = x_\Omega + \lambda(x - x_\Omega) = \lambda x + (1 - \lambda)x_\Omega \\ y' = y_\Omega + \lambda(y - y_\Omega) = \lambda y + (1 - \lambda)y_\Omega \end{cases}$

- Quelques propriétés des applications affines
  - ◇ La composée de deux applications affines est encore une application affine.
  - ◇ L'application affine $f : \begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = cx + dy + y_0 \end{cases}$ est bijective $\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

    La bijection réciproque f^{-1} est alors une application affine, et on trouve $M(x, y) = f^{-1}(M')$ en fonction de (x', y') en résolvant $f : \begin{cases} ax + by = x' - x_0 \\ cx + dy = y' - y_0 \end{cases}$ par rapport à (x, y).
  - ◇ Soit f une application affine et $F = \{M \in \mathcal{P},\ f(M) = M\}$ ses points invariants.
    Alors $F = \emptyset$ (ex : translations de vecteur $\neq \overrightarrow{0}$) ou F se réduit à un point (homothéties de rapport $\neq 1$), ou F est une droite, ou $F = P$ (si $f = \mathrm{Id}$.)
  - ◇ Soit f une application affine. Si A, B, C sont alignés, alors $f(A), f(B), f(C)$ sont alignés.
    On exprime cette situation en disant qu'une application affine *conserve l'alignement.*
  - ◇ Soit f une application affine, et $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. Alors l'image $f(\mathcal{D})$ est une droite ou un point (c'est toujours une droite si f est bijective.)

    Si les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, alors $f(\mathcal{D})$ et $f(\mathcal{D}')$ deux droites parallèles (ou deux points) : on dit qu'une application affine *conserve le parallélisme.*
  - ◇ Soit f une application affine, et A, B, C trois points non alignés.
    L'application f est déterminée de manière unique par les images $f(A), f(B), f(C)$.
  - ◇ Soit f une application affine, et $(A_k, \lambda_k)_{1 \leq k \leq p}$ des points pondérés de barycentre G.
    Alors $f(G)$ est le barycentre des points pondérés $(f(A_k), \lambda_k)_{1 \leq k \leq p}$.
    On exprime cette propriété en disant qu'une application affine *conserve le barycentre.*

    De même l'image de l'enveloppe convexe des A_k est celle des $f(A_k)$.

    Par exemple l'image du segment $[A, B]$ est le segment $[f(A), f(B)]$ et celle de la plaque triangulaire ABC est la plaque triangulaire de sommets $f(A), f(B), f(C)$.

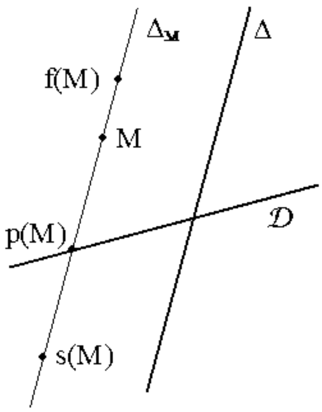
I.9 Projections, symétries, affinités

Soit $\mathcal{D}$ et Δ deux droites non parallèles du plan. Soit α un nombre réel.
Pour tout point M, soit Δ_M la droite passant par M et parallèle à Δ :

- Soit $p(M)$ l'unique point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ_M.
  L'application $M \mapsto p(M)$ est appelée *projection* sur $\mathcal{D}$, parallèlement à Δ.
- Soit $s(M)$ le symétrique du point M par rapport au point $p(M)$.
  L'application $M \mapsto s(M)$ est appelée *symétrie* par rapport à $\mathcal{D}$, parallèlement à Δ.
- Soit $f_\alpha(M)$ le point défini par $f(M) = p(M) + \alpha\, \overrightarrow{p(M)M}$.
  L'application $M \mapsto f(M)$ est appelé *affinité* de base $\mathcal{D}$, de direction Δ, de rapport α.

Exemple

On a représenté ici les droites $\mathcal{D}$, Δ, Δ_M, ainsi que les points M, $p(M)$, $s(M)$ et $f_\alpha(M)$ (avec par exemple $\alpha = 3/2$.)



Si $\alpha = 0$, alors f_α est la projection p.
Si $\alpha = 1$, alors f_α est l'application identité.
Si $\alpha = -1$, alors f_α est la symétrie s.
Les applications p, s et f_α sont des applications affines.
Tous les points de $\mathcal{D}$ sont invariants par p, s et f_α.
Dans le "parallèlement à" de p, s et f_α, seule compte la direction de Δ (on parlera souvent de projection ou de symétrie parallèlement à une droite vectorielle ou un vecteur.)

Propriétés

Avec les notations ci-dessus :

- La projection p est une application affine. La droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble de ses points invariants.
  On a l'égalité $p \circ p = p$.
  Réciproquement, soit q une application affine telle que $q \circ q = q$. Alors ou bien q est constante, ou bien c'est l'identité, ou bien c'est la projection sur une droite affine $\mathcal{D}$ parallèlement à une droite vectorielle Δ : on trouve $\mathcal{D}$ en cherchant les points invariants de q, et Δ en formant le vecteur $\overrightarrow{Mq(M)}$ pour tout point M qui n'est pas sur $\mathcal{D}$.
- La symétrie s est une application affine. La droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble de ses points invariants.
  On a $s \circ s = \mathrm{Id}$. L'application s est donc involutive (autrement dit $s^{-1} = s$.)
  Réciproquement, soit σ une application affine telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$. Alors ou bien σ est la symétrie par rapport à un point (homothétie de rapport -1), ou bien $\sigma = \mathrm{Id}$, ou bien c'est une symétrie par rapport à une droite affine $\mathcal{D}$ parallèlement à une droite vectorielle Δ : on trouve $\mathcal{D}$ en cherchant les points invariants de σ, et Δ en formant le vecteur $\overrightarrow{M\sigma(M)}$ pour tout point M qui n'est pas sur $\mathcal{D}$.
  Pour tout M de $\mathcal{P}$, on a les relations $p(M) = \frac{1}{2}(s(M) + M)$ ou encore $s(M) = 2p(M) - M$.
- Les affinités f_α sont des applications affines.
  Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a $f_\alpha(M) = \alpha M + (1 - \alpha)p(M)$.
  Le point $f_\alpha(M)$ est donc le barycentre des points (M, α) et $(p(M), 1 - \alpha)$.

I.10 Applications affines et nombres complexes.

Soit $f : m(x, y) \mapsto M(X, Y)$ une application affine définie par le système $\begin{cases} X = ax + by + x_0 \\ Y = cx + dy + y_0 \end{cases}$.

Soit $\begin{cases} z = x + iy \\ Z = X + iY \end{cases}$ les affixes de m et M. Posons $z_0 = x_0 + iy_0$.

On constate que, pour tout point $M(x, y)$:

$$\begin{aligned} Z &= X + iY = ax + by + x_0 + i(cx + dy + y_0) = (a + ic)x + (b + id)y + z_0 \\ &= \frac{a + ic}{2}(z + \overline{z}) + \frac{b + id}{2i}(z - \overline{z}) + z_0 = \omega z + \omega'\overline{z} + z_0 \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $f : m(z) \mapsto M(Z)$ du application du plan dans lui-même définie par une relation du type $Z = \omega z + \omega'\overline{z} + z_0$, avec (ω, ω', z_0) dans $\mathbb{C}^3$.

En notant $\begin{cases} z = x + iy \\ Z = X + iY \end{cases}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ et $\begin{cases} \omega = \alpha + i\beta \\ \omega' = \alpha' + i\beta' \end{cases}$, avec $\begin{cases} x, y, Y, Z, x_0, y_0 \in \mathbb{R} \\ \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R} \end{cases}$:

On trouve $X + iY = (\alpha + i\beta)(x + iy) + (\alpha' + i\beta')(x - iy) + x_0 + iy_0$.

Ainsi $\begin{cases} X = ax + by + x_0 \\ Y = cx + dy + y_0 \end{cases}$ avec $\begin{cases} a = \alpha + \alpha' \\ b = \beta' - \beta \end{cases}$ et $\begin{cases} c = \beta + \beta' \\ b = \alpha - \alpha' \end{cases}$.

On voit que l'application f est affine. On peut donc énoncer :

Proposition

Une application $f : m(z) \mapsto M(Z)$ est affine si et seulement s'il existe ω, ω' et z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout z de $\mathbb{C}$ on ait l'égalité $Z = \omega z + \omega'\overline{z} + z_0$.

Les complexes ω, ω' et z_0 sont définis de manière unique pour chaque application f.

Quelques exemples

(Les déplacements, antidéplacements et similitudes seront étudiés plus loin dans ce chapitre.)

– Les *applications linéaires* $f : m(z) \mapsto M(Z) = \omega z + \omega'\,\overline{z}$, $(\omega, \omega') \in \mathbb{C}^2$.

– Les applications constantes $f : m(z) \mapsto M(Z = z_0)$.

– Les dilatations $f : m(z) \mapsto M(Z = \lambda z + z_0)$, avec λ dans $\mathbb{R}^*$.
Si $\lambda = 1$ c'est une translation, sinon c'est une homothétie de rapport λ.
L'application $f : m(z) \to M(Z = -z + z_0)$ est la symétrie par rapport au point $A(z_0/2)$.

– Les *déplacements* $f : m(z) \mapsto M(Z = \omega z + z_0)$, avec $|\omega| = 1$.
Si $a = 1$, on retrouve les translations, sinon ce sont des rotations (un point fixe unique.)
L'application $f : m(z) \mapsto M(Z = e^{i\theta} z)$ est la rotation de centre 0 et d'angle θ.

– Les *antidéplacements* $f : m(z) \mapsto M(Z = \omega\overline{z} + z_0)$, avec $|\omega| = 1$.
$f : m(z) \mapsto M(Z = \overline{z})$ est la symétrie par rapport à (O, e_1), parallèlement à (O, e_2).
$f : m(z) \mapsto M(Z = -\overline{z})$ est la symétrie par rapport à (O, e_2), parallèlement à (O, e_1)

– Les *similitudes directes* $f : m(z) \mapsto M(Z = \omega z + z_0)$, avec $\omega \in \mathbb{C}^*$.
$f : m(z) \to M(Z = \omega z)$, avec $\omega \in \mathbb{C}^*$, est la composée commutative de l'homothétie h de centre O et de rapport $|\,\omega\,|$ et de la rotation r de centre O et d'angle $\arg(\omega)$ (2π).

– Les *similitudes indirectes* $f : m(z) \mapsto M(Z = \omega\overline{z} + z_0)$, avec $\omega \in \mathbb{C}^*$.

II Le plan affine euclidien orienté

II.1 Produit scalaire

Le plan affine $\mathcal{P}$ est identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, et on se place dans le repère canonique (O, e_1, e_2) (les affixes de O, e_1, e_2 sont respectivement $0, 1, i$.)

Le *produit scalaire* des vecteurs $u(x, y)$ et $u'(x', y')$ est $(u \mid v) = xx' + yy'$.

On le note parfois $< u, v >$ ou $u \cdot v$.

Propriétés

Pour tous vecteurs u, v, w et pour tous réels α, β, on a les propriétés suivantes :

- $(u \mid v) = (v \mid u), \quad (u \mid u) \geq 0, \quad$ et $\quad (u \mid u) = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$.
- $(u \mid \alpha v + \beta w) = \alpha\,(u \mid v) + \beta\,(u \mid w) \quad$ et $\quad (\alpha u + \beta v \mid w) = \alpha\,(u \mid w) + \beta\,(v \mid w)$.

Orthogonalité.

- On dit que les vecteurs u et v sont *orthogonaux* si $(u \mid v) = 0$.
- Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est le seul à être orthogonal à lui-même, donc à tous les vecteurs du plan.
- Si le vecteur $u(a, b)$ est non nul, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à u est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v(-b, a)$.

Produit scalaire et nombres complexes.

- Soient u, v deux vecteurs d'affixes respectifs z, z'. Alors $(u \mid u') = \mathrm{Re}\,(z\overline{z'}) = \frac{1}{2}(z\,\overline{z'} + z'\,\overline{z})$.
- Soient A, B, C trois points distincts du plan, d'affixes a, b, c.
  $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \arg(b-a) = \arg(c-a) + \dfrac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow \dfrac{b-a}{c-a}$ est imaginaire pur.

II.2 Norme euclidienne dans le plan

La *norme euclidienne* du vecteur $u(x, y)$ est $\|u\| = \sqrt{(u \mid u)} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriétés

- Pour tout vecteur u, pour tout réel λ : $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$ et $\|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$.
- Pour tous vecteurs u, v, on a $|(u \mid v)| \leq \|u\|\ \|v\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).
  Il y a égalité $|(u \mid v)| \leq \|u\|\ \|v\|$ si et seulement si u et v sont colinéaires.
- Pour tous vecteurs u, v, on a l'inégalité triangulaire : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
  On peut compléter cette inégalité par : $|\ \|u\| - \|v\|\ | \leq \|u \pm v\|$.
- Un vecteur u est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.
  Cela équivaut à l'existence de θ (unique modulo 2π) tel que $u = (\cos\theta, \sin\theta)$.
  Si $v \neq \overrightarrow{0}$, les vecteurs $\pm\frac{v}{\|v\|}$ sont unitaires, et ce sont les seuls de la droite $\mathbb{R}v$.

Relations diverses

- Pour tous vecteurs u, v et tous scalaires α, β : $\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2\,\|u\|^2 + 2\alpha\beta\,(u \mid v) + \beta^2\,\|v\|^2$.
- En particulier $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u \mid v) + \|v\|^2$, et $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\,(u \mid v) + \|v\|^2$.
- On a également : $(u \mid v) = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$.

II.3 Projections et symétries orthogonales

- Deux droites sont dites orthogonales si elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.
  Les droites $\mathcal{D} : ax + by = c$ et $\mathcal{D}' = a'x + b'y = c'$ sont orthogonales $\Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.
  Les droites $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ et $\mathcal{D}' : y = \alpha' x + \beta'$ sont orthogonales $\Leftrightarrow \alpha\alpha' = -1$.
- Toutes les droites affines orthogonales à une droite affine $\mathcal{D}$ sont parallèles entre elles.
  On peut donc parler de la droite vectorielle orthogonale à une droite affine donnée $\mathcal{D}$.
- Soit $\mathcal{D}$ une droite affine du plan. On appelle projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ la projection du plan sur $\mathcal{D}$ parallèlement à la droite vectorielle orthogonale à $\mathcal{D}$.
  On définit pareillement la symétrie orthogonale (ou encore *réflexion*) par rapport à $\mathcal{D}$.

Expression d'une projection ou d'une symétrie orthogonale.

- Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_0, y_0)$ et *dirigée* par le vecteur unitaire u.
  La projection orthogonale H de M sur $\mathcal{D}$ s'obtient en écrivant $H = A + (\overrightarrow{AM} \mid u)\, u$.
  Le symétrique orthogonal M' de M par rapport à $\mathcal{D}$ est $M' = 2H - M$.
  Si u n'est pas unitaire, la projection orthogonale H de M s'écrit $H = A + \dfrac{(\overrightarrow{AM} \mid u)}{\|u\|^2}\, u$.
- Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_0, y_0)$ et *orthogonale* au vecteur unitaire v.
  La projection orthogonale H de M sur $\mathcal{D}$ s'obtient en écrivant $H = M - (\overrightarrow{AM} \mid v)\, v$.
  Le symétrique orthogonal M' de M par rapport à $\mathcal{D}$ est $M' = 2H - M = M - 2(\overrightarrow{AM} \mid v)\, v$.
  L'affinité de base $\mathcal{D}$, de direction v et de rapport α est : $M \mapsto M + (\alpha - 1)(\overrightarrow{AM} \mid v)\, v$.
  Remarque : si v n'est pas unitaire, alors $H = M - \dfrac{(\overrightarrow{AM} \mid v)}{\|v\|^2}\, v$.

II.4 Distance dans le plan euclidien

La distance entre les points $A(x, y)$ et $B(x', y')$ est $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.
Si aucune confusion de notation n'est à craindre, on note souvent AB plutôt que $d(A, B)$.

- Pour tous points A, B, C : $\begin{cases} d(A,B) = d(B,A)\ ;\ d(A,B) \geq 0\ ;\ d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B \\ d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B) \quad \textit{(inégalité triangulaire)} \end{cases}$
- On a : $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (égalité $\Leftrightarrow C$ appartient au segment $[A, B]$.)
- Pour tous points A, B et tout vecteur u, on a $d(t_u(A), t_u(B)) = d(A, B)$.
  On exprime cette propriété en disant que la distance est *invariante par translation*.
- Pour tous vecteurs u, v, on a : $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.
  On en déduit que si $ABCD$ est un parallélogramme, $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.
  Autrement dit : la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des longueurs des carrés des cotés.
- Pour tous vecteurs u et v, on a $(u \mid v) = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
  Ou encore : le triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$.
- Soient A, B deux points distincts du plan. La *médiatrice* du segment $[A, B]$ est la droite passant par le milieu I de ce segment et orthogonale au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
  C'est aussi l'ensemble des points équidistants de A et de B.