Table des matières

I Limites des fonctions numériques

1. Propriétés vraies "au voisinage d'un point"

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $a = \pm\infty$).
Soit $\mathcal{P}$ un prédicat (une propriété) de la variable réelle x, défini sur I.
$\mathcal{P}(x)$ désigne donc une proposition, vraie ou fausse selon les valeurs de x dans I.
On dit que $\mathcal{P}$ est vraie *au voisinage de a* si l'une des situations suivantes est réalisée :

- a est réel et $\exists\,\delta > 0$ tel que : $\forall\,x \in I\cap]a-\delta, a+\delta[$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- $a = +\infty$ et $\exists\,M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\,x > M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.
- $a = -\infty$ et $\exists\,M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\,x < M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.

Remarques

Dans le premier cas, la clause $x \in I$ n'est utile que si a est une extrémité de I.
En effet si a est intérieur à I, alors pour tout δ *assez petit*, $]a-\delta, a+\delta[\subset I$.
Si f et g sont des applications définies sur I, on pourra par exemple écrire des propositions du genre : *si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors ...*

2. Limite en un point

Définition *(Limite en un point de $\mathbb{R}$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit a un réel, élément ou extrémité de I.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en a si :

$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0$ tq $(x \in I$ et $|x-a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \varepsilon$.

On dit que $+\infty$ est limite de f en a si :

$\forall\,M \in \mathbb{R}, \exists\,\delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x-a| \leq \delta) \Rightarrow f(x) \geq M$.

On dit que $-\infty$ est limite de f en a si :

$\forall\,M \in \mathbb{R}, \exists\,\delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x-a| \leq \delta) \Rightarrow f(x) \leq M$.

Remarques

Dans les trois cas, la clause $x \in I$ n'est pas nécessaire si a est intérieur à I.
Si $a \in I$ et donc si f est définie en a, la seule limite *possible* de f en a est le réel $f(a)$.

Définition *(Limite en $+\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]\alpha, +\infty[$, ou $I = [\alpha, +\infty[$, ou $I = \mathbb{R}$.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M$.

Définition *(Limite en $-\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]-\infty, \alpha[$, ou $I =]-\infty, \alpha]$, ou $I = \mathbb{R}$.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow f(x) \geq M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow f(x) \leq M$.

Proposition *(Unicité de la limite)*

Les définitions précédentes permettent de donner un sens à la phrase ℓ *est limite de* f *en* a, où ℓ et a sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (droite numérique achevée), à condition que a soit élément de l'intervalle I ou qu'il en soit une extrémité.
Si un tel élément ℓ existe, alors il est unique.
On l'appelle *la* limite de f en a, et on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a \end{array}$

Remarque

Il se peut qu'une application ne possède pas de limite en un point. Par exemple
- ◇ L'application $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- ◇ L'application $x \mapsto \mathrm{E}[x]$ n'a pas de limite en 0.

Importance des limites nulles ou des limites en 0

Si ℓ est un réel, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$.
Si a est un réel, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = \ell$.

Proposition *(Caractérisation séquentielle des limites)*

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
Soit a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ (élément de I ou extrémité de I). Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ pour toute suite (u_n) de I tendant vers a, $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \ell$.

Définition *(Limite par valeurs supérieures ou inférieures)*

On suppose que la limite de f en a (élément de $\overline{\mathbb{R}}$) est le réel ℓ.

Quand x tend vers a, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs supérieures (resp. inférieures) si, au voisinage de a, $f(x) \geq \ell$ (resp. $f(x) \leq \ell$).

On peut alors éventuellement noter : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell^+$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell^-$).

3. Limite à gauche ou à droite

Définition *(Limite à gauche)*

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]-\infty, a[$.

Le réel a est donc l'extrémité droite de J, et n'appartient pas à J.

On dit que f admet ℓ pour limite en a à gauche si g admet ℓ pour limite en a.

On note alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^-} f = \ell$, ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a^- \end{array}$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow f(x) \geq M \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow f(x) \leq M \end{cases}$$

Définition *(Limite à droite)*

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]a, +\infty[$.

Le réel a est donc l'extrémité gauche de J, et n'appartient pas à J.

On dit que f admet ℓ pour limite en a à droite si g admet ℓ pour limite en a.

On note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^+} f = \ell$, ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a^+ \end{array}$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow f(x) \geq M \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow f(x) \leq M \end{cases}$$

Remarque

La limite de f en a, à gauche ou à droite, si elle existe, est unique. De même, la plupart des propriétés vraies pour les limites le sont encore s'il s'agit de limites à gauche ou à droite.

4. Opérations sur les limites

Proposition

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + \ell'$ (si $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée $\infty - \infty$.)

De même, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \ell\ell'$(si $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée $0 \times \infty$.)

Cas particulier

Si λ est un réel non nul, alors $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda\ell$.

Proposition *(Limite de l'inverse d'une fonction)*

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) > 0$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) < 0$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition *(Composition des limites)*

On suppose que l'application $g \circ f$ est définie au voisinage de a.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \ell$.

5. Limites et relation d'ordre

Proposition *(Limite et valeur absolue)*

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to a} |f|(x) = |\ell|$.

La réciproque est fausse, mais : $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f|(x) = 0$.

Proposition *(Conséquences de l'existence d'une limite finie)*

Si f admet une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a (réciproque fausse).

Si f admet en a une limite réelle non nulle ℓ , alors au voisinage de a : $|f(x)| \geq \dfrac{|\ell|}{2}$.

Plus précisément : $\begin{cases} \text{Si } \ell > 0, \text{ alors au voisinage de } a,\ f(x) > \dfrac{\ell}{2} > 0. \\ \text{Si } \ell < 0, \text{ alors, au voisinage de } a,\ f(x) < \dfrac{\ell}{2} < 0. \end{cases}$

Remarque

Les propriétés précédentes sont utiles parce qu'elles précisent le signe de f au voisinage de a et permettent de majorer $\dfrac{1}{|f(x)|}$ au voisinage de ce point par $\dfrac{2}{|\ell|}$.

Proposition

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).
Si on a $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \ell'$.
En particulier, si λ est un nombre réel :
- Si $f(x) \leq \lambda$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \lambda$.
- Si $f(x) \geq \lambda$ au voisinage de a, alors $\ell \geq \lambda$.

Remarque

Si $f(x) < g(x)$ au voisinage de a, alors on peut seulement affirmer que $\ell \leq \ell'$.
Par passage à la limite, les inégalités strictes "deviennent" donc des inégalités larges.

Proposition *(Principe des gendarmes)*

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.)
Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.

Cas particuliers

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$.
- Supposons $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a : $\begin{cases} \text{Si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty. \\ \text{Si } \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty. \end{cases}$

Proposition

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).
Si $\ell < \ell'$, alors, au voisinage de a on a l'inégalité $f(x) < g(x)$.
En particulier, si λ est un nombre réel :
- Si $\ell < \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) < \lambda$ au voisinage de a.
- Si $\ell > \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) > \lambda$ au voisinage de a.

Proposition *(Limite aux bornes, pour une application monotone)*

Soit f une application monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b, a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$).
Alors la limite ℓ de f en a et la limite ℓ' de f en b existent dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

- Supposons f croissante.
  Si elle est majorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell' = +\infty$.
  Si elle est minorée, ℓ est un réel, sinon $\ell = -\infty$.
- Supposons f décroissante.
  Si elle est minorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell' = -\infty$.
  Si elle est majorée, ℓ est un réel, sinon $\ell = +\infty$.

Proposition *(Limite en un point intérieur, pour une application monotone)*

Soit f une application monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b, a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$).
Soit c un réel de l'intervalle $]a, b[$.
L'application f admet en c une limite à gauche et une limite à droite, toutes deux finies.
Plus précisément :

- Si f est croissante : $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \le f(c) \le \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.
- Si f est décroissante : $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \ge f(c) \ge \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.

6. Formes indéterminées

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

On dit qu'on a affaire à la forme indéterminée :

$$\begin{cases} \infty - \infty \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } f+g \text{ et si } \ell = +\infty\ ,\ \ell' = -\infty. \\ 0 \times \infty \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } fg \text{ et si } \ell = 0,\ \ell' = \pm\infty. \\ \dfrac{0}{0} \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \dfrac{f}{g} \text{ et si } \ell = \ell' = 0. \\ \dfrac{\infty}{\infty} \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \dfrac{f}{g} \text{ et si } \ell = \pm\infty \text{ et } \ell' = \pm\infty. \end{cases}$$

Le calcul de $\lim\limits_{a}(f^g)$ donne lieu aux formes indéterminées : $\begin{cases} 1^\infty \text{ si } \ell = 1 \text{ et } \ell' = \pm\infty. \\ \infty^0 \text{ si } \ell = +\infty \text{ et } \ell' = 0. \\ 0^0 \text{ si } \ell = \ell' = 0. \end{cases}$

Toutes ces formes indéterminées peuvent se ramener à $\infty - \infty$ ou à $0 \times \infty$.

Pour les trois dernières il suffit en effet de poser $f^g = \exp(g \ln f)$.

Dans une forme indéterminée, tous les résultats sont possibles.

Chaque problème doit donc être résolu individuellement.

Comme on dit, il faut *lever* la forme indéterminée.

II Comparaisons locales

Dans ce paragraphe, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et des applications qui sont définies sur I et à valeurs réelles.

On désigne par a un élément ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$).

1. Définitions

Définition *(Fonction dominée par une autre)*

Soient f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *dominée* par g au voisinage du point a (ou en a) si :

Il existe un réel positif ou nul M tel que, au voisinage de a, $|f(x)| \leq M|g(x)|$.

On note alors $f = \mathrm{O}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{O}_a(g)$.

Définition *(Fonction négligeable devant une autre)*

Soient f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage du point a (ou en a) si :

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ est vraie au voisinage de a.

On note alors $f = \mathrm{o}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{o}_a(g)$.

Définition *(Fonction équivalente à une autre)*

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a (ou en a) si :

L'application $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de a.

On note alors $f \sim g$, ou éventuellement $f \underset{a}{\sim} g$.

Définitions équivalentes

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a).

f est dominée par g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

f est négligeable devant g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

f est équivalente à g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a.

Remarques

– $f \sim g$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$.
La symétrie permet donc dire : *f et g sont équivalentes au voisinage de a.*

– Dans les notations $f = \mathrm{o}(g)$, $f = \mathrm{O}(g)$ et $f \sim g$, le point a n'apparait pas en général.
Le contexte doit donc être clair.