Table des matières

I Limites des fonctions numériques . . . 2
1. Propriétés vraies "au voisinage d'un point" . . . 2
2. Limite en un point . . . 2
3. Limite à gauche ou à droite . . . 4
4. Opérations sur les limites . . . 5
5. Limites et relation d'ordre . . . 5
6. Formes indéterminées . . . 7
II Comparaisons locales . . . 8
1. Définitions . . . 8
2. Propriétés des relations $f = o(g)$ et $f = O(g)$ . . . 9
3. Propriétés des équivalents . . . 9
4. Quelques conseils . . . 10
5. Comparaisons usuelles . . . 11
III Développements limités . . . 12
1. Notion de développement limité . . . 12
2. Développements limités usuels . . . 15
3. Opérations sur les DL . . . 16

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

I Limites des fonctions numériques

1. Propriétés vraies "au voisinage d'un point"

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $a = \pm\infty$).
Soit $\mathcal{P}$ un prédicat (une propriété) de la variable réelle x, défini sur I.
$\mathcal{P}(x)$ désigne donc une proposition, vraie ou fausse selon les valeurs de x dans I.
On dit que $\mathcal{P}$ est vraie *au voisinage de* a si l'une des situations suivantes est réalisée :
- a est réel et $\exists\,\delta > 0$ tel que : $\forall\, x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
- $a = +\infty$ et $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x > M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.
- $a = -\infty$ et $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, x < M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.

Remarques

Dans le premier cas, la clause $x \in I$ n'est utile que si a est une extrémité de I.
En effet si a est intérieur à I, alors pour tout δ *assez petit*, $]a-\delta, a+\delta[\subset I$.
Si f et g sont des applications définies sur I, on pourra par exemple écrire des propositions du genre : *si* $f(x) \leq g(x)$ *au voisinage de* a, *alors ...*

2. Limite en un point

Définition *(Limite en un point de $\mathbb{R}$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit a un réel, élément ou extrémité de I.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en a si :
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tq $(x \in I$ et $|x-a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en a si :
$\forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x-a| \leq \delta) \Rightarrow f(x) \geq M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en a si :
$\forall\, M \in \mathbb{R}$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x-a| \leq \delta) \Rightarrow f(x) \leq M$.

Remarques

Dans les trois cas, la clause $x \in I$ n'est pas nécessaire si a est intérieur à I.
Si $a \in I$ et donc si f est définie en a, la seule limite *possible* de f en a est le réel $f(a)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Définition *(Limite en $+\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]\alpha, +\infty[$, ou $I = [\alpha, +\infty[$, ou $I = \mathbb{R}$.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow f(x) \geq M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq A \Rightarrow f(x) \leq M$.

Définition *(Limite en $-\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]-\infty, \alpha[$, ou $I =]-\infty, \alpha]$, ou $I = \mathbb{R}$.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow f(x) \geq M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq A \Rightarrow f(x) \leq M$.

Proposition *(Unicité de la limite)*

Les définitions précédentes permettent de donner un sens à la phrase *ℓ est limite de f en a*, où ℓ et a sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (droite numérique achevée), à condition que a soit élément de l'intervalle I ou qu'il en soit une extrémité.
Si un tel élément ℓ existe, alors il est unique.
On l'appelle *la* limite de f en a, et on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\to} \ell$

Remarque

Il se peut qu'une application ne possède pas de limite en un point. Par exemple
- ◇ L'application $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- ◇ L'application $x \mapsto \mathrm{E}[x]$ n'a pas de limite en 0.

Importance des limites nulles ou des limites en 0

Si ℓ est un réel, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$.
Si a est un réel, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = \ell$.

Proposition *(Caractérisation séquentielle des limites)*

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
Soit a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ (élément de I ou extrémité de I). Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ pour toute suite (u_n) de I tendant vers a, $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \ell$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Définition *(Limite par valeurs supérieures ou inférieures)*

On suppose que la limite de f en a (élément de $\overline{\mathbb{R}}$) est le réel ℓ.

Quand x tend vers a, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs supérieures (resp. inférieures) si, au voisinage de a, $f(x) \geq \ell$ (resp. $f(x) \leq \ell$).

On peut alors éventuellement noter : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell^+$ (resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell^-$).

3. Limite à gauche ou à droite

Définition *(Limite à gauche)*

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]-\infty, a[$.

Le réel a est donc l'extrémité droite de J, et n'appartient pas à J.

On dit que f admet ℓ pour limite en a à gauche si g admet ℓ pour limite en a.

On note alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^-} f = \ell$, ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a^- \end{array}$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow f(x) \geq M \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leq x < a) \Rightarrow f(x) \leq M \end{cases}$$

Définition *(Limite à droite)*

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]a, +\infty[$.

Le réel a est donc l'extrémité gauche de J, et n'appartient pas à J.

On dit que f admet ℓ pour limite en a à droite si g admet ℓ pour limite en a.

On note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^+} f = \ell$, ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a^+ \end{array}$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow f(x) \geq M \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leq a + \delta) \Rightarrow f(x) \leq M \end{cases}$$

Remarque

La limite de f en a, à gauche ou à droite, si elle existe, est unique. De même, la plupart des propriétés vraies pour les limites le sont encore s'il s'agit de limites à gauche ou à droite.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

4. Opérations sur les limites

Proposition

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + \ell'$ (si $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée $\infty - \infty$.)

De même, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \ell\ell'$(si $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée $0 \times \infty$.)

Cas particulier

Si λ est un réel non nul, alors $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda\ell$.

Proposition *(Limite de l'inverse d'une fonction)*

On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) > 0$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) < 0$, alors $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition *(Composition des limites)*

On suppose que l'application $g \circ f$ est définie au voisinage de a.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$.

5. Limites et relation d'ordre

Proposition *(Limite et valeur absolue)*

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to a} |f|(x) = |\ell|$.

La réciproque est fausse, mais : $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f|(x) = 0$.

Proposition *(Conséquences de l'existence d'une limite finie)*

Si f admet une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a (réciproque fausse).

Si f admet en a une limite réelle non nulle ℓ , alors au voisinage de a : $|f(x)| \geq \dfrac{|\ell|}{2}$.

Plus précisément :
- Si $\ell > 0$, alors au voisinage de a, $f(x) > \dfrac{\ell}{2} > 0$.
- Si $\ell < 0$, alors, au voisinage de a, $f(x) < \dfrac{\ell}{2} < 0$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Remarque

Les propriétés précédentes sont utiles parce qu'elles précisent le signe de f au voisinage de a et permettent de majorer $\dfrac{1}{|f(x)|}$ au voisinage de ce point par $\dfrac{2}{|\ell|}$.

Proposition

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si on a $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \ell'$.

En particulier, si λ est un nombre réel :
- Si $f(x) \leq \lambda$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \lambda$.
- Si $f(x) \geq \lambda$ au voisinage de a, alors $\ell \geq \lambda$.

Remarque

Si $f(x) < g(x)$ au voisinage de a, alors on peut seulement affirmer que $\ell \leq \ell'$.

Par passage à la limite, les inégalités strictes "deviennent" donc des inégalités larges.

Proposition *(Principe des gendarmes)*

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.)

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.

Cas particuliers

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = 0$.
- Supposons $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a : $\begin{cases} \text{Si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty. \\ \text{Si } \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty. \end{cases}$

Proposition

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si $\ell < \ell'$, alors, au voisinage de a on a l'inégalité $f(x) < g(x)$.

En particulier, si λ est un nombre réel :
- Si $\ell < \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) < \lambda$ au voisinage de a.
- Si $\ell > \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) > \lambda$ au voisinage de a.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

Proposition *(Limite aux bornes, pour une application monotone)*

Soit f une application monotone de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ $(a<b, a\in\overline{\mathbb{R}}, b\in\overline{\mathbb{R}})$.
Alors la limite ℓ de f en a et la limite ℓ' de f en b existent dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

- Supposons f croissante.
  Si elle est majorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell'=+\infty$.
  Si elle est minorée, ℓ est un réel, sinon $\ell=-\infty$.
- Supposons f décroissante.
  Si elle est minorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell'=-\infty$.
  Si elle est majorée, ℓ est un réel, sinon $\ell=+\infty$.

Proposition *(Limite en un point intérieur, pour une application monotone)*

Soit f une application monotone de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ $(a<b, a\in\overline{\mathbb{R}}, b\in\overline{\mathbb{R}})$.
Soit c un réel de l'intervalle $]a,b[$.
L'application f admet en c une limite à gauche et une limite à droite, toutes deux finies.
Plus précisément :

- Si f est croissante : $\lim\limits_{x\to c-} f(x)\leq f(c)\leq \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.
- Si f est décroissante : $\lim\limits_{x\to c-} f(x)\geq f(c)\geq \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.

6. Formes indéterminées

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell'$ (avec $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ et $\ell'\in\overline{\mathbb{R}}$).

On dit qu'on a affaire à la forme indéterminée :

$$\begin{cases} \infty-\infty \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } f+g \text{ et si } \ell=+\infty\ ,\ \ell'=-\infty. \\ 0\times\infty \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } fg \text{ et si } \ell=0,\ \ell'=\pm\infty. \\ \dfrac{0}{0} \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \dfrac{f}{g} \text{ et si } \ell=\ell'=0. \\ \dfrac{\infty}{\infty} \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \dfrac{f}{g} \text{ et si } \ell=\pm\infty \text{ et } \ell'=\pm\infty. \end{cases}$$

Le calcul de $\lim\limits_a(f^g)$ donne lieu aux formes indéterminées : $\begin{cases} 1^\infty \text{ si } \ell=1 \text{ et } \ell'=\pm\infty. \\ \infty^0 \text{ si } \ell=+\infty \text{ et } \ell'=0. \\ 0^0 \text{ si } \ell=\ell'=0. \end{cases}$

Toutes ces formes indéterminées peuvent se ramener à $\infty-\infty$ ou à $0\times\infty$.

Pour les trois dernières il suffit en effet de poser $f^g=\exp(g\ln f)$.

Dans une forme indéterminée, tous les résultats sont possibles.

Chaque problème doit donc être résolu individuellement.

Comme on dit, il faut *lever* la forme indéterminée.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

II Comparaisons locales

Dans ce paragraphe, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et des applications qui sont définies sur I et à valeurs réelles.

On désigne par a un élément ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$).

1. Définitions

Définition *(Fonction dominée par une autre)*

Soient f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *dominée* par g au voisinage du point a (ou en a) si :

Il existe un réel positif ou nul M tel que, au voisinage de a, $|f(x)| \leq M|g(x)|$.

On note alors $f = \mathrm{O}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{O}_a(g)$.

Définition *(Fonction négligeable devant une autre)*

Soient f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage du point a (ou en a) si :

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ est vraie au voisinage de a.

On note alors $f = \mathrm{o}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{o}_a(g)$.

Définition *(Fonction équivalente à une autre)*

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a (ou en a) si :

L'application $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de a.

On note alors $f \sim g$, ou éventuellement $f \sim_a g$.

Définitions équivalentes

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a).

f est dominée par g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

f est négligeable devant g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

f est équivalente à g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a.

Remarques

- $f \sim g$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$. La symétrie permet donc dire : *f et g sont équivalentes au voisinage de a.*
- Dans les notations $f = \mathrm{o}(g)$, $f = \mathrm{O}(g)$ et $f \sim g$, le point a n'apparait pas en général. Le contexte doit donc être clair.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.