Table des matières

I Généralités sur les suites

I.1 Suites d'éléments d'un ensemble quelconque

Définition

Une *suite* d'éléments d'un ensemble E est une application u de $\mathbb{N}$ dans E, ou ce qui revient au même une famille d'éléments de E indicée par $\mathbb{N}$.

L'image $u(n)$ est notée u_n et appelée *terme d'indice* n, ou *terme général*, de la suite u, et u_0 en est le *terme initial*.

La suite u est elle-même notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarques

- On parle de suite *numérique* si $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, *réelle* si $E = \mathbb{R}$, et *complexe* si $E = \mathbb{C}$.
- On ne confondra pas la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs.
  En fait deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont égales $\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$.
  Par exemple, les suites de termes généraux $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ sont distinctes, mais elles ont le même ensemble de valeurs $\{-1, 1\}$.
- La donnée d'une suite complexe $(z_n)_{n\geq 0}$ équivaut à celle de deux suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, z_n = u_n + iv_n$, c'est-à-dire $u_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$ et $v_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$.

I.2 Suites extraites

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'un ensemble E.

On appelle *suite extraite* de la suite u toute suite v de E dont le terme général peut s'écrire $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Proposition

Avec les notations de l'énoncé, et pour tout entier n, $\varphi(n) \geq n$.

Remarques

- Si $\varphi(n) = n + p$ ($p \in \mathbb{N}$), la suite v est notée $(u_n)_{n\geq p}$ (son terme initial est u_p).
- On considère souvent $\begin{cases} \text{la suite } (u_{2n})_{n\geq 0} \text{ des termes d'indices pairs : } \varphi(n) = 2n, \\ \text{la suite } (u_{2n+1})_{n\geq 0} \text{ des termes d'indices impairs : } \varphi(n) = 2n + 1. \end{cases}$

Les définitions et propriétés qui vont suivre seront données pour des suites $(u_n)_{n\geq 0}$, mais elles peuvent être adaptées aux suites $(u_n)_{n\geq p}$, avec des changements de notation évidents.

I.3 Suites périodiques ou stationnaires

Définition *(Suites constantes ou stationnaires)*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'un ensemble E.

Elle est dite *constante* s'il existe a dans E tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = a$.

Elle est dite *stationnaire* s'il existe a dans E et n_0 dans $\mathbb{N}$ tels que : $\forall\, n \geq n_0, u_n = a$.

Définition *(Suites périodiques)*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'un ensemble E.
Elle est dite *périodique* s'il existe un entier positif p tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$.
Si un entier p satisfait à cette propriété, tous ses multiples y satisfont aussi.
La période de la suite u est alors l'entier positif minimum p qui vérifie cette propriété.
On dit alors que la suite u est *p-périodique*.

Remarques

– Les suites constantes sont les suites 1-périodiques.
– Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est p-périodique, alors $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \{u_n, n \in [\![0, p-1]\!]\}$.

I.4 Suites définies par récurrence

Définition

Soit f une application de E dans E, et soit a un élément de E.
On peut définir une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de E par :
◇ La donnée de son terme initial $u_0 = a$.
◇ La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
On dit alors que la suite u est définie *par récurrence*.

Remarque

Si f n'est définie que sur une partie $\mathcal{D}$ de E, il faut vérifier, pour assurer l'existence de la suite u, que a appartient à $\mathcal{D}$ et que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \in \mathcal{D} \Rightarrow u_{n+1} \in \mathcal{D}$.

Exemple

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$
Pour que cette suite ait un sens il faut en particulier que u_1 existe, c'est-à-dire $u_0 \leq 1$.
Mais pour que u_2 existe il faut $u_1 = \sqrt{1-u_0} \leq 1$, c'est-à-dire $u_0 \geq 0$.
La condition $0 \leq u_0 \leq 1$ est suffisante pour assurer l'existence de la suite u, car l'intervalle $[0, 1]$ est stable par $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Récurrences de pas supérieur

On peut également définir des suites par des récurrences de pas 2 (ou supérieur), c'est-à-dire en se donnant les deux termes initiaux u_0 et u_1 et une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$$

où f est une application à valeurs dans E, définie sur $E \times E$ ou sur une partie de $E \times E$.

I.5 Généralités sur les suites numériques

Dans la suite de ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Définition *(Opérations sur les suites numériques)*

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites numériques (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{K}$.)
On définit la suite somme s et la suite produit p par : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = u_n + v_n$, et $p_n = u_n v_n$.
On définit le produit λu de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par un scalaire λ : le terme général en est λu_n.

Définition *(Suites numériques bornées)*

La suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite *bornée* s'il existe $M \geq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$, c'est-à-dire si l'ensemble des valeurs prises par cette suite est borné dans $\mathbb{K}$ (on utilise la valeur absolue pour les suites réelles, le module pour les suites complexes.)

Remarque

Les suites constantes, stationnaires ou périodiques sont évidemment des suites bornées (tout simplement parce qu'elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.)

Définition *(Suites réelles monotones)*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels.
La suite u est dite *croissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
Cela équivaut à : $m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$.
Elle est dite *décroissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
Cela équivaut à : $m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n$.
Elle est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Définition *(Suites réelles strictement monotones)*

La suite u est *strictement croissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
Cela équivaut à : $m < n \Rightarrow u_m < u_n$.
Elle est *strictement décroissante* si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.
Cela équivaut à : $m < n \Rightarrow u_m > u_n$.
Elle est *strictement monotone* si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Définition *(Suites réelles majorées ou minorées)*

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels.
La suite u est *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
Cela équivaut à dire que l'ensemble de ses valeurs est majoré dans $\mathbb{R}$.
Elle est dite *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
Cela équivaut à dire que l'ensemble de ses valeurs est minoré.