# Table des matières

I Continuité . . . 2
I.1 Continuité en un point . . . 2
I.2 Propriétés . . . 3
I.3 Continuité sur un intervalle . . . 3
I.4 Théorème de la bijection réciproque . . . 4
I.5 Continuité uniforme . . . 5
I.6 Applications lipschitziennes . . . 6
II Dérivabilité d'une fonction numérique . . . 7
II.1 Dérivabilité en un point . . . 7
II.2 Dérivabilité à gauche ou à droite en un point . . . 8
II.3 Opérations sur les applications dérivables en un point . . . 9
III Dérivabilité sur un intervalle . . . 10
III.1 Applications dérivables, applications de classe C1 . . . 10
III.2 Extremums d'une fonction dérivable . . . 11
III.3 Rolle et accroissements finis . . . 12
III.4 Monotonie des applications dérivables . . . 13
IV Applications de classe $\mathcal{C}^k$ . . . 14
IV.1 Dérivées successives . . . 14
IV.2 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$ . . . 15
IV.3 Formules de Taylor . . . 16
V Applications convexes . . . 17
V.1 Définitions équivalentes de la convexité . . . 17
V.2 Régularité des applications convexes . . . 19
V.3 Inégalités de convexité . . . 20

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

# I Continuité

## I.1 Continuité en un point

**Définition**

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que $f$ est *continue* en $a$ si la limite de $f$ en $a$ existe.
Au vu des définitions cette limite ne peut être égale qu'à $f(a)$.
Autrement dit : $f$ est continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x - a| \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

**Définition** *(Continuité à gauche en un point)*

Soit $f$ un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit $a$ un élément de $I$, qui ne soit pas l'extrémité gauche de $I$.
Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $J = I \cap ]-\infty, a]$
On dit que $f$ est *continue à gauche* en $a$ si $g$ est continue en $a$.
Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ ou encore :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(a - \delta \leq x \leq a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

**Définition** *(Continuité à droite en un point)*

Soit $f$ un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a$ un élément de $I$ qui n'est pas l'extrémité droite de $I$.
Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $J = I \cap [a, +\infty[$.
On dit que $f$ est *continue à droite* en $a$ si $g$ est continue en $a$.
Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(x)$ ou encore :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(a \leq x \leq a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

**Remarque**

Soit $a$ un point intérieur à l'intervalle $I$. Soit $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$.
$f$ est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en $a$.

**Définition** *(Discontinuité de première espèce)*

Soit $f$ un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a$ un point de $I$.
Si $f$ n'est pas continue en $a$, on dit que $f$ est *discontinue* en ce point.
Si $a$ est intérieur à $I$, si $f$ est discontinue en $a$, mais si les limites à gauche et à droite en $a$ existent et sont finies, on dit que $f$ présente en $a$ une *discontinuité de première espèce*.

**Définition** *(Prolongement par continuité)*

Soit $f$ un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a$ un réel, extrémité de $I$ mais n'appartenant pas à $I$.
On dit que $f$ est prolongeable par continuité en $a$ si $\ell = \lim\limits_{a} f$ existe et est finie.
Cela signifie que $g$ définie par $g(x) = f(x)$ sur $I$, et par $g(a) = \ell$ est continue en $a$.
On dit que l'application $g$ est le *prolongement par continuité* de $f$ en $a$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

## I.2 Propriétés

**Proposition** *(Opérations sur applications continues en un point)*

Soient $f$ et $g$ deux éléments de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit $a$ un élément de $I$.

Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, il en est de même pour $fg$ et $\alpha f+\beta g$ $(\alpha\beta\in\mathbb{R})$.

Si $f$ est continue en $a$ et si $f(a)\neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en $a$.

Si $f$ est continue en $a$ et si $g$ est continue en $b=f(a)$, alors $g\circ f$ est continue en $a$.

**Proposition** *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*

Soit $f$ un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit $a$ un élément de $I$.

$f$ est continue en $a$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)$ de $I$ convergeant vers $a$, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

**Remarques**

La propriété précédente est utile pour montrer qu'une application $f$ n'est pas continue en un point $a$ : on construit une suite $(u_n)$ convergeant vers $a$, mais telle que la suite de terme général $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

De même si le réel $a$ est une extrémité de $I$ (n'appartenant pas à $I$), si la suite $(u_n)$ converge vers $a$, mais si la suite de terme général $f(u_n)$ n'a pas de limite (ou si sa limite est infinie), on peut dire que $f$ n'est pas prolongeable par continuité au point $a$.

## I.3 Continuité sur un intervalle

**Définition**

Soit $f$ un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

On dit que $f$ est continue sur $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$.

On note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(I)$) l'ensemble des applications continues sur $I$, à valeurs réelles.

**Propriétés et exemples**

- Toute application constante est continue sur $\mathbb{R}$.
  Il en est de même des applications $x\mapsto x$ et $x\mapsto|x|$.
- Soient $f$ et $g$ deux applications continues sur $I$.
  Pour tous scalaires $\alpha$ et $\beta$, $\alpha f+\beta g$ est continue sur $I$.
  Il en est de même de l'application $fg$.
  Si $g$ ne s'annule pas sur $I$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur $I$.
- Les applications polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
  Une application rationnelle (quotient de deux applications polynômiales) est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- Les applications usuelles $x\mapsto\sin(x)$, $x\mapsto\cos(x)$, $x\mapsto\tan(x)$, $x\mapsto\exp(x)$, $x\mapsto\ln(x)$ et $x\mapsto x^\alpha$ sont continues sur chaque intervalle de leur domaine.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

– Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

– Si $f$ est continue sur $I$, alors les applications $|f|$, $f^+$ et $f^-$ sont continues sur $I$.
Si $f$ et $g$ sont continues sur $I$, alors $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont continues sur $I$.

– Si $f$ est continue sur $I$, alors la restriction de $f$ à tout intervalle $J \subset I$ est continue sur $J$.

**Remarques**

Pour démontrer qu'une application est continue sur un intervalle $I$, on ne revient pratiquement jamais à la définition *epsilonesque*.

Le plus souvent, la fonction à étudier est en effet un *cocktail* de fonctions continues classiques et les propriétés précédentes permettent de conclure.

La continuité, même sur un intervalle, reste une *propriété locale*, ce qui signifie qu'elle n'est que le bilan de la continuité de $f$ en chacun des points de $I$.

**Théorème** *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit $f$ une application continue sur l'intervalle $I$.
Soient $a$, $b$ deux éléments de $I$ $(a < b)$.
Soit $y$ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe un réel $x$, compris entre $a$ et $b$, tel que $f(x) = y$.

**Proposition** *(énoncé équivalent au TVI)*

Soit $f$ une application continue sur l'intervalle $I$, à valeurs réelles.
Alors $f(I)$ est un intervalle.

**Proposition**

Soit $f$ une application continue sur l'intervalle $I$, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe $a$ et $b$ dans $I$ tels que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$.
Alors il existe $c$ dans $I$, compris entre $a$ et $b$, tel que $f(c) = 0$.

**Théorème** *(Fonction continue sur un segment)*

Soit $f$ une application continue sur un segment $[a, b]$ ($a$, $b$ deux réels, $a \leq b$).
Alors $f([a, b])$ est un segment $[m, M]$.

**Proposition**

Toute application continue sur un segment y est bornée et y atteint ses bornes :
Il existe $x_0$ dans $[a, b]$ tel que $f(x_0) = m = \min\{f(x), a \leq x \leq b\}$.
Il existe $x_1$ dans $[a, b]$ tel que $f(x_1) = M = \max\{f(x), a \leq x \leq b\}$.

## I.4 Théorème de la bijection réciproque

**Théorème**

Soit $f$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, continue et strictement monotone sur $I$.
Alors $f$ réalise une bijection de $I$ sur l'intervalle image $J = f(I)$.
De plus, la bijection réciproque $f^{-1}$, de $J$ vers $I$, est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que $f$).



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

**Remarques**

- Les courbes représentatives de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$ (si le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$).
- Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à $f(x) = 0$.
  Le théorème de la bijection réciproque assure l'unicité de cette solution.
- Si $f$ est continue sur l'intervalle $I$, l'intervalle $J = f(I)$ n'a pas toujours les mêmes propriétés que $I$ (ouvert ou fermé, borné ou non borné), sauf si $I$ est un segment. Mais si $f$ est strictement monotone, le caractère ouvert, semi-ouvert, ou fermé de $I$ est conservé.

**Exemples d'inversions d'applications continues**

- L'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  La bijection réciproque est $x \mapsto \ln(x)$.
- Pour tout $\alpha$ de $\mathbb{R}^{+*}$, les applications $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont deux bijections de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, réciproques l'une de l'autre.
- L'application $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin(x)$ (*arc sinus de* $x$).
- L'application $x \mapsto \cos(x)$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos(x)$ (*arc cosinus de* $x$).
- L'application $x \mapsto \tan(x)$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
  La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan(x)$ (*arc tangente de* $x$).

## I.5 Continuité uniforme

**Définition**

Soit $f$ un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que $f$ est *uniformément continue* sur $I$ si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in I \times I, |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

**Remarque**

Pour montrer qu'une application $f : I \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, on doit montrer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver $x$ et $y$ dans $I$ tels que $|x - y| < \delta$, mais cependant tels que $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.
Il revient au même de trouver deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ de $I$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ mais telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n) - f(x_n)) \neq 0$.

**Continuité et continuité uniforme**

Rappelons la définition de la continuité de $f$ en un point $a$ de $I$ :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que : $\forall x \in$I$, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.
Dans cette définition, le réel $\delta$ dépend de $\varepsilon$ et du point $a$.
La continuité uniforme exprime l'existence d'un réel $\delta$ ne dépendant plus du point $a$.
En particulier : si $f$ est uniformément continue sur l'intervalle $I$, $f$ est continue sur $I$.



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

La réciproque est fausse, comme le montrent ces exemples : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur } ]0,1]. \\ f(x) = \sin(x^2) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

Le théorème suivant donne une condition où la continuité implique la continuité uniforme.

**Théorème** *(Théorème de Heine)*

Soit $f$ une application continue sur un segment $[a,b]$ ($a$, $b$ deux réels, $a \leq b$).
Alors $f$ est uniformément continue sur $[a,b]$.

## I.6 Applications lipschitziennes

**Définition**

Soit $f$ un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
On dit que $f$ est $\lambda-$ *lipschitzienne* (ou encore lipschitzienne de rapport $\lambda$) sur $I$ si :
$\forall\,(x,y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leq \lambda|x-y|$.

**Remarques et propriétés**

- Dire que $f$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $I$, c'est dire que les taux d'accroissement de $f$ sur $I$ (entre deux points quelconques) sont majorés en valeur absolue par $\lambda$.
- Si $f$ est $\lambda$ -lipschitzienne sur $I$, alors $f$ est uniformément continue sur $I$.
  La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur le segment $[0,1]$.
- Si $f$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $I$, alors, pour tout $\mu > \lambda$, $f$ est $\mu$-lipschitzienne sur $I$.
- Si $f$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $I$, avec $\lambda < 1$, on dit que $f$ est *contractante* sur $I$.
- L'inégalité des accroissements finis (cours de Terminale) indique que si $f$ est dérivable sur $I$, et si, pour tout $x$ de $I$, $|f'(x)| \leq \lambda$, alors $f$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $I$.

**Opérations entre applications lipschitziennes**

- Si $f$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, alors $f$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $[a,c]$.
- Si $f$ et $g$ sont $\lambda$-lipschitziennes sur $I$, alors $f+g$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $I$.
- Si $f$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $I$, alors $\alpha f$ est $|\alpha|\lambda$-lipschitzienne sur $I$.
- Si $f$ et $g$ sont lipschitziennes et bornées sur $I$, alors $fg$ est lipschitzienne sur $I$.
- Si $f$ est $\lambda$-lipschitzienne sur $I$, si $g$ est $\mu$-lipschitzienne sur $J$, et si $f(I) \subset J$, alors l'application $g \circ f$ est $\lambda\mu$-lipschitzienne sur $I$.

Les notions d'applications uniformément continue ou lipschitzienne sur un intervalle $I$ sont des notions globales (contrairement à la continuité, qui est une notion locale). En particulier, cela n'a aucun sens de dire que $f$ est uniformément continue ou lipschitzienne en un point !


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

# II Dérivabilité d'une fonction numérique

Dans tout ce chapitre, on considère des applications qui sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

## II.1 Dérivabilité en un point

**Définition** *(Nombre dérivé en un point)*

On dit que $f$ est *dérivable* en un point $a$ de $I$ si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée *nombre dérivé* de $f$ en $a$ et est notée $f'(a)$, ou $D(f)(a)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

**Interprétation géométrique**

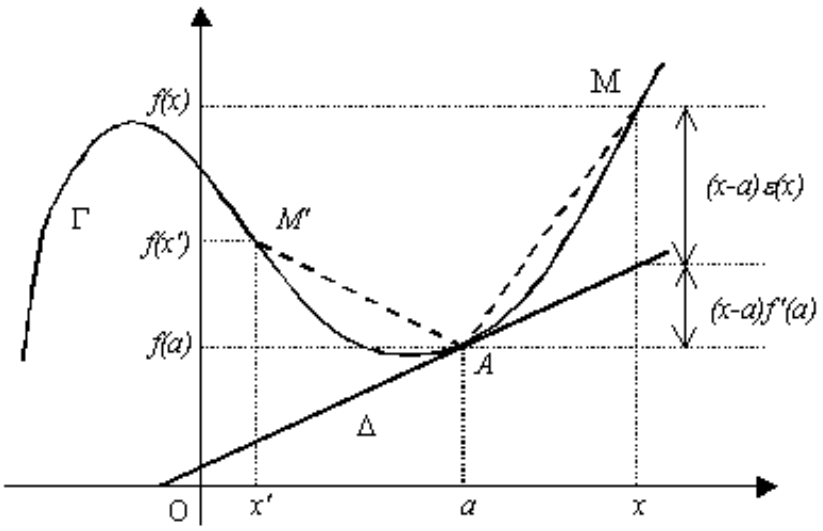
Soient $A=(a,f(a))$ et $M(x,f(x))$ sur la courbe représentative $\Gamma$ de $f$.

Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la *corde* $AM$.

Dire que $f$ est dérivable en $a$, c'est dire que la corde $AM$ possède une position limite non verticale $\Delta$, de coefficient directeur $f'(a)$, quand $x$ tend vers $a$, c'est-à-dire quand $M$ tend vers $A$ sur $\Gamma$. On dit que $\Delta$ est la *tangente* à $\Gamma$ en son point d'abscisse $a$.

Dire que $f$ est dérivable en $a$, c'est donc dire que la courbe représentative $\Gamma$ de $f$ présente au point $A(a,f(a))$ une tangente $\Delta$ non verticale.

L'équation de $\Delta$ est $y=f(a)+(x-a)f'(a)$.




**Proposition** *(Une autre définition de la dérivabilité)*

$f$ est dérivable en un point $a$ de I $\Leftrightarrow$ il existe un réel $\ell$ et une application $x\mapsto\varepsilon(x)$ de $I$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ et $\varepsilon(a)=0$, et tels que :

$$\forall\, x\in I,\ f(x)=f(a)+(x-a)\ell+(x-a)\varepsilon(x)$$

Le réel $\ell$ est alors égal à $f'(a)$.

La figure ci-dessus montre les quantités $(x-a)f'(a)$ et $(x-a)\varepsilon(x)$, relatives à un point $M(x,f(x))$ assez "éloigné" de $A$. Au voisinage de $A$, et si $f'(a)\neq 0$ (c'est-à-dire si la tangente $\Delta$ n'est pas horizontale), alors $(x-a)\varepsilon(x)$ est négligeable devant $(x-a)f'(a)$.



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.

**Remarques et exemples**

- Une translation permet de se ramener à un calcul à l'origine : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- Si $f$ dérivable en $a$, $f$ est continue en $a$. La réciproque est fausse.
  Exemple : si $f(0) = 0$ et $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f$ est continue mais non dérivable en 0.
- Si $f$ est constante sur $I$, alors : $\forall\, a \in I,\ f'(a) = 0$.
- Si $f$ est l'application $x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) alors : $\forall\, a \in \mathbb{R},\ f'(a) = na^{n-1}$.
- Pour tout $a$ de $\mathbb{R}$, $\exp'(a) = \exp(a)$ et $\ln'(a) = \dfrac{1}{a}$.
- Pout tout $a$ de $\mathbb{R}$, $\sin'(a) = \cos(a)$ et $\cos'(a) = -\sin(a)$.
  Si $a \neq \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$, alors $\tan'(a) = 1 + \tan^2(a)$.

## II.2 Dérivabilité à gauche ou à droite en un point

On complète les définitions précédentes avec la notion de nombre dérivé à gauche ou à droite.

**Définition** *(Nombre dérivé à gauche)*

Soit $a$ un point de $I$, distinct de l'extrémité gauche de $I$.

On dit que $f$ est dérivable à gauche en $a$ si $\lim\limits_{x\to a,\, x<a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche de $f$ en $a$ et est notée $f'_g(a)$.

**Définition** *(Nombre dérivé à droite)*

Soit $a$ un point de $I$, distinct de l'extrémité droite de $I$.

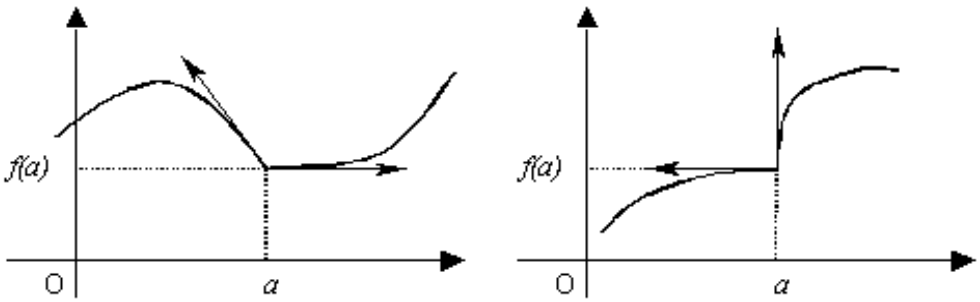
On dit que $f$ est dérivable à droite en $a$ si $\lim\limits_{x\to a,\, x>a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée nombre dérivé à droite de $f$ en $a$ et est notée $f'_d(a)$.

**Interprétation géométrique**

Dire que $f$ est dérivable à droite (resp. à gauche) en $a$, c'est dire que la courbe $\Gamma$ de $f$ admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente à droite (resp. à gauche) non verticale.

Le coefficient directeur de cette demi-tangente est $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$.)




Sur l'exemple de gauche, $f$ est dérivable à gauche et à droite en $a$, avec $f'_g(a) = -1$ (demi-tangente oblique, parallèle à $y = -x$) et $f'_d(a) = 0$ (demi-tangente horizontale.)

Sur l'exemple de droite, on a $f'_g(a) = 0$ (demi-tangente horizontale), mais $f$ n'est pas dérivable à droite en $a$ (il y a bien une demi-tangente mais elle est verticale).



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 20 pages.