



# Table des matières

I	Intégrale des fonctions en escaliers . . . . .	2
I.1	Fonctions en escaliers . . . . .	2
I.2	Intégrale des fonctions en escaliers . . . . .	3
II	Intégrale des fonctions continues par morceaux . . . . .	5
II.1	Fonctions continues par morceaux . . . . .	5
II.2	Intégrale des fonctions continues par morceaux . . . . .	5
II.3	Propriétés de l'intégrale . . . . .	7
II.4	Extension de la définition et nouvelle notation . . . . .	10
III	Calcul approché des intégrales . . . . .	11
III.1	Convergence des sommes de Riemann . . . . .	11
III.2	Méthode des trapèzes . . . . .	12
IV	Primitives et intégrale d'une fonction continue . . . . .	14
IV.1	Le théorème fondamental et ses conséquences . . . . .	14
IV.2	Méthodes de calcul des intégrales . . . . .	15
IV.3	Tableau de primitives usuelles . . . . .	17
V	Fonctions à valeurs complexes . . . . .	18
V.1	Limites et continuité des fonctions à valeurs complexes . . . . .	18
V.2	Dérivabilité des fonctions à valeurs complexes . . . . .	19
V.3	Intégration des fonctions à valeurs complexes . . . . .	20

# I Intégrale des fonctions en escaliers

Dans ce chapitre,  $[a, b]$  désigne un segment de  $\mathbb{R}$ , avec  $a < b$ .

## I.1 Fonctions en escaliers

### Définition (subdivisions)

On appelle *subdivision* de  $[a, b]$  toute suite finie  $(x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b)$ .  
L'ensemble  $\{a = x_0, \dots, x_k, \dots, x_n = b\}$  est appelé le *support* de la subdivision.  
La quantité  $h = \max(x_{k+1} - x_k)$  est appelée le *pas* de la subdivision.

### Remarque

Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux subdivisions de  $[a, b]$ .

On dit que  $\sigma$  est *plus fine* que  $\sigma'$  si le support de  $\sigma$  contient celui de  $\sigma'$ .

La subdivision notée  $\sigma \cup \sigma'$  et dont le support est la réunion de ceux de  $\sigma$  et de  $\sigma'$  est plus fine que chacune des subdivisions  $\sigma$  et  $\sigma'$ . Réciproquement si une subdivision de  $[a, b]$  est plus fine que  $\sigma$  et  $\sigma'$ , alors elle est plus fine que la subdivision  $\sigma \cup \sigma'$ .

### Définition (applications en escaliers sur un segment)

Soit  $\varphi$  une application de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $\varphi$  est *en escaliers* s'il existe une subdivision  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$  de  $[a, b]$  et  $n$  réels  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  tels que :  
 $\forall k = 0, \dots, n-1, \forall t \in ]x_k, x_{k+1}[ , \varphi(t) = \lambda_k$ .  
On dit alors que la subdivision  $\sigma$  est *adaptée* (ou encore *subordonnée*) à  $\varphi$ .  
On note  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions en escaliers sur  $[a, b]$ .

### Exemple

La figure 1 représente une fonction en escaliers  $\varphi$  sur le segment  $[a, b]$ . On n'a pas représenté les valeurs de  $\varphi$  aux points  $x_k$ , car ces valeurs sont sans importance.

### Définition (applications en escaliers sur un intervalle quelconque)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide. Soit  $\varphi$  une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  
On dit que  $\varphi$  est en escaliers sur  $I$  s'il existe un segment  $[a, b]$  de  $I$  tel que :  
– L'application  $\varphi$  est nulle en dehors du segment  $[a, b]$ .  
– La restriction  $\psi$  de  $\varphi$  à  $[a, b]$  est en escaliers sur  $[a, b]$ .  
Une subdivision de  $[a, b]$  adaptée à  $\psi$  est encore dite adaptée à  $\varphi$ .

### Remarques et propriétés

- Dans la pratique, on considérera surtout des fonctions en escaliers sur un segment  $[a, b]$ .
- Si  $\sigma$  est une subdivision adaptée à  $\varphi$ , toute subdivision plus fine que  $\sigma$  est adaptée à  $\varphi$ .
- Les fonctions constantes sur  $[a, b]$  sont des cas particuliers de fonctions en escaliers.
- Si  $\varphi, \psi$  sont en escaliers sur  $[a, b]$ , alors :  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha\varphi + \beta\psi$  est en escaliers sur  $[a, b]$ .  
Plus généralement, toute combinaison linéaire de fonctions en escaliers est encore en escaliers.  
De même  $\varphi\psi$  est en escaliers sur  $[a, b]$  (comme tout produit de fonctions en escaliers.)

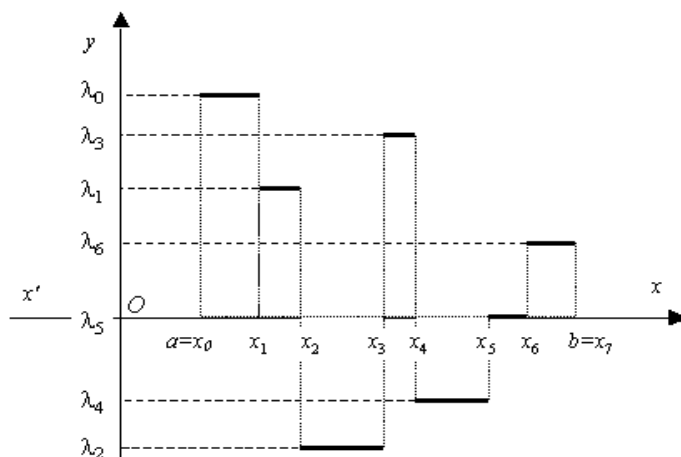


FIG. 1 – Une fonction en escaliers

## I.2 Intégrale des fonctions en escaliers

### Définition

Soient  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction en escaliers et  $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$  une subdivision adaptée.

On suppose que :  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \forall t \in ]x_k, x_{k+1}[ , \varphi(t) = \lambda_k$ .

Le réel  $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\lambda_k$  est appelé *intégrale* de  $\varphi$  et est noté  $\int_{[a,b]} \varphi$ .

### Interprétation graphique

Comme le montre la figure 2, l'intégrale de  $\varphi$  est égale à la somme des "aires" algébriques (comptées positivement ou négativement selon le signe des  $\lambda_k$ ) des zones rectangulaires définies par le graphe de  $\varphi$  :

### Remarques et propriétés

– L'intégrale de  $\varphi$  ne dépend pas de la subdivision adaptée à  $\varphi$  choisie.

– Si  $\varphi$  est constante égale à  $\lambda$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} \varphi = (b - a)\lambda$ .

– Soient  $\varphi$  en escaliers sur  $[a, b]$  et  $\psi$  ne différant de  $\varphi$  qu'en un nombre fini de points.

Alors  $\psi$  est en escaliers sur  $[a, b]$  et  $\int_{[a,b]} \psi = \int_{[a,b]} \varphi$ .

– Soit  $\varphi$  une application nulle sur  $[a, b]$ , sauf peut-être en un nombre fini de points.

Alors  $\varphi$  est élément de  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  et  $\int_{[a,b]} \varphi = 0$ .

– Soit  $\varphi$  un élément de  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ . Soit  $c$  est un élément de  $]a, b[$ .

Alors les restrictions de  $\varphi$  à  $[a, c]$  et  $[c, b]$  sont en escaliers et :  $\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$ .

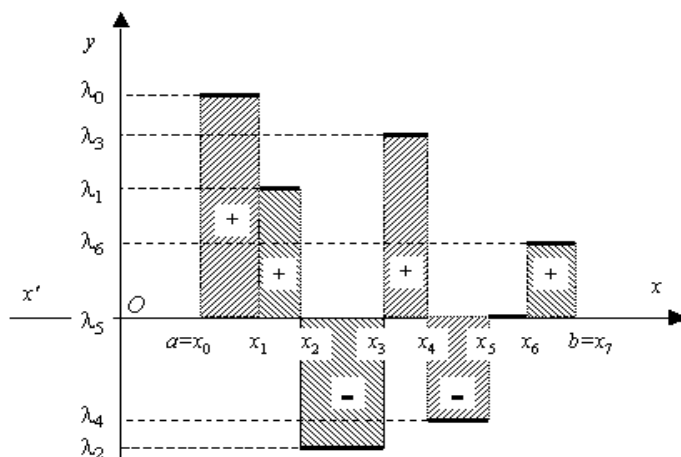


FIG. 2 – Intégrale d'une fonction en escaliers

### Linéarité de l'intégrale

Soient  $\varphi, \psi$  deux applications en escaliers sur  $[a, b]$ , et soient  $\alpha, \beta$  deux réels.

Alors on a l'égalité  $\int_{[a,b]} (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_{[a,b]} \varphi + \beta \int_{[a,b]} \psi$ .

L'application qui à  $\varphi$  associe  $\int_{[a,b]} \varphi$  est donc *linéaire* de  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Positivité et croissance

– Soient  $\varphi, \psi$  dans  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ . Si  $\varphi \geq 0$  alors  $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$ . Si  $\varphi \leq \psi$  alors :  $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$ .

– Si  $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ , alors  $|\varphi| : t \mapsto |\varphi(t)| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  et  $\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi|$ .

– Si  $\varphi$  est en escaliers de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leq (b - a) \sup_{t \in [a,b]} |\varphi(t)|$ .

## II Intégrale des fonctions continues par morceaux

### II.1 Fonctions continues par morceaux

#### Définition

On dit qu'une application  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est *continue par morceaux* sur  $[a, b]$  s'il existe une subdivision  $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  de  $[a, b]$  (dite adaptée à  $f$ , ou encore subordonnée à  $f$ ) telle que, pour tout  $k$  de  $\{0, \dots, n-1\}$  :

- La restriction  $f_k$  de  $f$  à  $]x_k, x_{k+1}[$  est continue.
- Cette restriction est prolongeable par continuité aux points  $x_k$  et  $x_{k+1}$ .

On note  $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$  l'ensemble des applications continues par morceaux sur  $[a, b]$ .

#### Remarques et propriétés

- Si  $\sigma$  est une subdivision adaptée à  $f$ , toute subdivision plus fine que  $\sigma$  est adaptée à  $f$ .
- Dire que  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ , c'est dire que  $f$  n'a au plus qu'un nombre fini de discontinuités sur  $[a, b]$ , et que toutes sont de *première espèce* : en chaque point de discontinuité, il y a une limite à gauche et une limite à droite, et ces limites sont finies.
- Toute application continue par morceaux sur  $[a, b]$  est bornée sur  $[a, b]$ .  
Toute application continue sur  $[a, b]$  est continue par morceaux.  
Toute application en escaliers sur  $[a, b]$  est continue par morceaux.
- Soient  $f, g$  deux applications continues par morceaux sur  $[a, b]$ .  
Pour tous scalaires  $\alpha$  et  $\beta$ , l'application  $\alpha f + \beta g$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ .  
De même, l'application  $fg$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ .
- Soit  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ , d'intérieur non vide.  
Soit  $f$  une application définie sur  $I$ , à valeurs réelles.  
On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $I$  si elle l'est sur tout segment de  $I$ .  
Par exemple, l'application "partie entière" est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .
- Si  $f$  est continue par morceaux il en est de même de l'application  $|f| : x \mapsto |f(x)|$ .

### II.2 Intégrale des fonctions continues par morceaux

#### Proposition (approximation par des applications en escaliers)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue par morceaux.

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe deux applications en escaliers  $\varphi, \psi$  telles que :

- Pour tout  $x$  de  $[a, b]$ ,  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ .
- Pour tout  $x$  de  $[a, b]$ ,  $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$ .

**Proposition**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue par morceaux.

Il existe une suite  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  de fonctions en escaliers telles que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{[a,b]} |f - \varphi_n| \right) = 0$ .

On dit que la suite  $(\varphi_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

D'après la proposition précédente, on peut choisir la suite  $(\varphi_n)$  telle que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on ait  $\varphi_n \leq f$  (ou au contraire telle que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on ait  $f \leq \varphi_n$ .)

**Proposition** (intégrale sur  $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ )

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue par morceaux.

Soit  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions en escaliers, uniformément convergente vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

Alors la suite des intégrales  $\int_{[a,b]} \varphi_n$  est convergente. On pose  $\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n$ .

Cette quantité est appelée intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Remarques**

- La valeur de  $\int_{[a,b]} f$  ne dépend pas de la suite  $(\varphi_n)$  de  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  utilisée pour approcher  $f$ .
- Si l'application  $f$  est en escaliers sur  $[a, b]$  elle est continue par morceaux. L'intégrale de  $f$  est évidemment la même selon les deux points de vue.
- Si  $f$  est à valeurs positives, la suite  $(\varphi_n)$  peut être choisie telle que  $\varphi_n \geq 0$  pour tout  $n$ .

**Interprétation en terme d'aire**

Soit  $f$  une application continue par morceaux sur  $[a, b]$ . L'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  représente l'aire algébrique du domaine situé entre la courbe  $y = f(x)$  et l'axe  $Ox$ , cette "aire" étant comptée positivement sur les intervalles où  $f \geq 0$  et négativement sur les intervalles où  $f \leq 0$  (voir figure 3).

Numériquement, le résultat est exprimé en *unités d'aire* (ua).

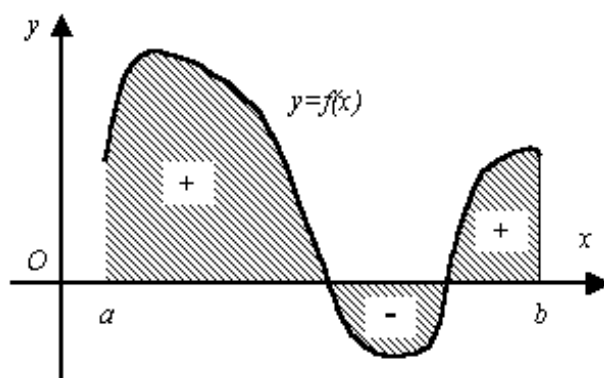


FIG. 3 – Interprétation de l'intégrale

### II.3 Propriétés de l'intégrale

Elles découlent des propriétés analogues de  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$  par passage à la limite.

#### Proposition (linéarité de l'intégrale)

Soient  $f, g$  deux applications continues par morceaux sur  $[a, b]$ , et soient  $\alpha, \beta$  deux scalaires.

Alors on a l'égalité : 
$$\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g.$$

Ainsi l'application qui à  $f$  associe  $\int_{[a,b]} f$  est *linéaire* de  $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Proposition (positivité et croissance de l'intégrale)

Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues par morceaux sur  $[a, b]$  (on rappelle que  $a < b$ .)

– Si  $f$  est positive ou nulle sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f \geq 0$ .

– Si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$ .

#### Proposition

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue par morceaux.

On suppose que l'application  $f$  garde un signe constant sur  $[a, b]$  et que  $\int_{[a,b]} f = 0$ .

◇ Si  $f$  est continue en un point  $x_0$  de  $[a, b]$ , alors  $f(x_0) = 0$ .

◇ En particulier, si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est identiquement nulle.

#### Remarques

– Si  $f \geq 0$  est continue en un point  $x_0$  de  $[a, b]$  et si  $f(x_0) > 0$ , alors  $\int_{[a,b]} f > 0$ .

Donc si  $f$  est continue  $\geq 0$  mais non identiquement nulle sur  $[a, b]$ , alors  $\int_{[a,b]} f > 0$ .

– Si  $f$  et  $g$  sont continues, si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$  et si  $f \neq g$ , alors  $\int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$ .

#### Proposition (inégalité de la moyenne)

Soient  $f, g$  deux applications continues par morceaux de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors on a l'inégalité : 
$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$

En particulier : 
$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

#### Définition (valeur moyenne d'une application)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue par morceaux.

La quantité  $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$  est appelé *valeur moyenne* de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Remarques**

- On a  $\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq \sup_{[a,b]} f$ . Si  $f$  est continue,  $\exists c \in [a, b]$  tel que  $\int_{[a,b]} f = (b-a)f(c)$ .
  - La valeur moyenne  $\lambda$  de  $f$  vérifie l'égalité  $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \lambda$  : c'est le réel par lequel on peut remplacer  $f$  sans changer l'intégrale de  $f$ .
- Sur la figure 4 les deux aires hachurées sont donc égales.

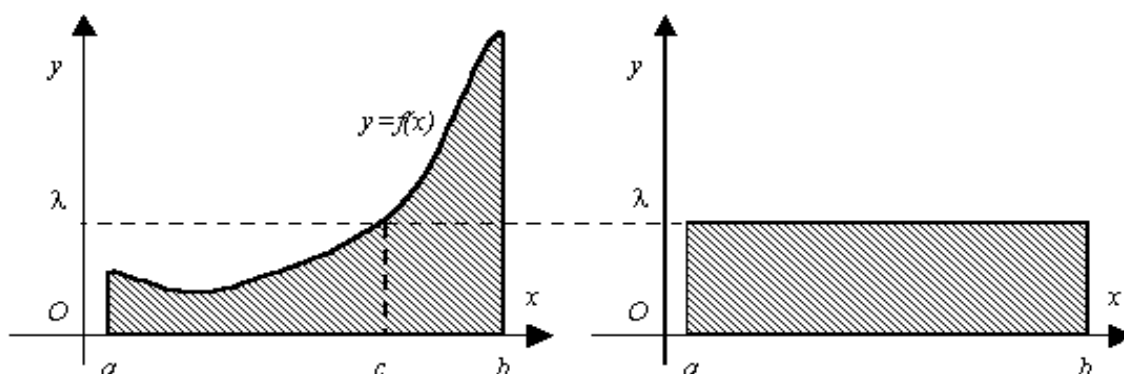


FIG. 4 – Interprétation de la valeur moyenne

**Proposition** (*inégalité de Cauchy-Schwarz*)

- || Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continues par morceaux. Alors on a  $\left( \int_{[a,b]} f g \right)^2 \leq \int_{[a,b]} f^2 \int_{[a,b]} g^2$ .
- || Si  $f, g$  sont continues, il y a égalité  $\Leftrightarrow f, g$  sont proportionnelles.

**Proposition** (*relation de Chasles*)

- || Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue par morceaux, et soit  $c$  un point de  $]a, b[$ .
- || Alors  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ , et on a :  $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ .

**Remarques diverses**

 – **Extension aux applications définies “presque partout”**

Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  et si  $g$  ne diffère de  $f$  qu'en un nombre fini de points, alors  $g$  est encore continue par morceaux sur  $[a, b]$ , et  $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$ .

Si  $f$  est définie sur  $[a, b]$  sauf peut-être en un nombre fini de points  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ , et si la restriction de  $f$  à chaque  $]x_k, x_{k+1}[$  est prolongeable par continuité à  $[x_k, x_{k+1}]$ , on peut donc encore définir l'intégrale de  $f$ , en donnant à  $f$  une valeur quelconque en chacun des  $x_k$ .

 – **Invariance de l'intégrale par translation**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue par morceaux. Soit  $\alpha$  un nombre réel.