Table des matières

I Matrices à coefficients dans K . . . 3
I.1 Généralités . . . 3
I.2 Matrices particulières . . . 3
I.3 Matrices carrées particulières . . . 4
II Opérations sur les matrices . . . 5
II.1 L'espace vectoriel des matrices de type (p,k) . . . 5
II.2 Produit des matrices . . . 5
II.3 L'algèbre des matrices de type (n,n) . . . 6
II.4 Calcul des puissances d'une matrice . . . 7
II.5 Cas des matrices triangulaires ou diagonales . . . 8
II.6 Transposition . . . 8
II.7 Matrices symétriques ou antisymétriques . . . 9
III Matrice d'une application linéaire . . . 10
III.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base . . . 10
III.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases . . . 10
III.3 Propriétés opératoires . . . 12
IV Changements de bases . . . 13
IV.1 Matrices de passage . . . 13
IV.2 Changements de matrice pour une application linéaire . . . 13
IV.3 Matrices équivalentes et matrices semblables . . . 14
V Trace d'une matrice, d'un endomorphisme . . . 15
V.1 Trace d'une matrice . . . 15
V.2 Trace d'un endomorphisme . . . 15
VI Opérations élémentaires, calcul du rang . . . 17
VI.1 Rang d'une famille de vecteurs . . . 17
VI.2 Rang d'une application linéaire . . . 17
VI.3 Rang d'une matrice . . . 17
VI.4 Matrices échelonnées . . . 18
VI.5 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes . . . 19
VI.6 Calcul du rang par la méthode du pivot . . . 20
VI.7 Calcul de l'inverse par la méthode du pivot . . . 21

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

VII Systèmes d'équations linéaires 22
VII.1 Définitions 22
VII.2 Interprétations d'un système linéaire 22
VII.3 Structure de l'ensemble des solutions 23
VII.4 Systèmes de Cramer 24
VIII Résolution des systèmes linéaires 26
VIII.1 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système 26
VIII.2 Méthode du pivot de Gauss 26
VIII.3 Trois exemples 29

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Matrices à coefficients dans K

I.1 Généralités

Définition *(matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$)*

Soient n et p deux entiers strictement positifs.
Une *matrice* A de type (n,p) est une application de $\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}$ dans $\mathbb{K}$.
On note souvent $a_{i,j}$ l'image du couple (i,j) par l'application A.
Les a_{ij} sont appelés les *coefficients* de la matrice A.
On écrit alors $A=(a_{i,j})_{i=1..n,j=1..p}$, ou plus simplement $A=(a_{ij})$.

Notations

- On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour décrire un élément A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on dispose les coefficients dans un tableau à n lignes et p colonnes, le coefficient $a_{i,j}$ venant se placer à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- Par exemple, la matrice A de type $(3,2)$ définie par :
  $a_{1,1}=5$, $a_{1,2}=3$, $a_{2,1}=0$, $a_{2,2}=7$, $a_{3,1}=4$ et $a_{3,2}=1$ se note $A=\begin{pmatrix}5&3\\0&7\\4&1\end{pmatrix}$.
- Finalement, c'est ce tableau lui-même qu'on finit par appeler une matrice.
  On dit donc qu'un élément M de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est une matrice à n lignes et à p colonnes.

I.2 Matrices particulières

- **Matrice nulle**
  La *matrice nulle* $A=(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est définie par : $\forall(i,j),a_{i,j}=0$.
- **Matrices carrées**
  On appelle *matrice carrée* d'ordre n toute matrice de type (n,n).
  On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- **Diagonale d'une matrice carrée**
  Les coefficients $a_{i,i}$ (l'indice de colonne est égal à l'indice de ligne) d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont appelés *coefficients diagonaux*.
  Ils forment ce qu'on appelle la *diagonale* de A.
  Les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i>j$ sont donc *en dessous* de cette diagonale, alors que les coefficients $a_{i,j}$ tels que $j>i$ sont *au dessus* de celle-ci.
- **Matrices-ligne**
  Les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés *matrices-ligne*.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

On peut identifier un élément $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ avec le n-uplet correspondant $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ de $\mathbb{K}^p$.

– **Matrices-colonne**

Les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés *matrices-colonne*.

On identifie parfois une telle matrice-colonne avec un élément de $\mathbb{K}^n$.

I.3 Matrices carrées particulières

– **Matrices diagonales**

Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonale* si pour tous indices distincts i et j, $a_{i,j} = 0$: seuls sont éventuellement non nuls les éléments diagonaux de A.

– **Matrice identité**

La *matrice identité d'ordre n* est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ valent 1. Cette matrice est notée I_n.

On remarque que pour tous indices i et j, $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (notation de Kronecker).

– **Matrices scalaires**

Les matrices de la forme $A = \lambda I_n$, c'est-à-dire les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux, sont dites *matrices scalaires*.

– **Matrices triangulaires**

Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure* si pour tous i et j tels que $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls.

La matrice A est dite *triangulaire inférieure* si pour tout i, j tel que $i < j$ on a $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont nuls.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

– **Matrices strictement triangulaires**

Une matrice carrée A est dite strictement triangulaire si elle est triangulaire et si de plus ses coefficients diagonaux sont nuls.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est strictement triangulaire supérieure.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

II Opérations sur les matrices

II.1 L'espace vectoriel des matrices de type (p,k)

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, et λ un scalaire.
On définit les matrices $C = A + B$ et $D = \lambda A$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, de la manière suivante :
Pour tous indices i et j, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Propriétés

– $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un groupe commutatif pour la loi $+$.

L'élément neutre est la matrice nulle, notée 0.
L'opposée de la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice $-A = (-a_{ij})$.

– $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension np.
Une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, dite *base canonique*, est formée par les np matrices E_{ij} (tous les coefficients de E_{ij} sont nuls sauf celui d'indice i, j qui vaut 1).

Plus précisément, si $M = (a_{ij})$, alors $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, E_{ij}$.

II.2 Produit des matrices

Définition

Soient $A = (a_{ik})$ une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kj})$ une matrice de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $C = AB$, élément de $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$, de la manière suivante :

Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, pour tout j de $\{1, \dots, q\}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$.

Interprétation

Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de $C = AB$ est donc obtenu en sommant les produits des termes de même rang dans la i-ième ligne de A et dans la j-ième colonne de B, selon le schéma ci-dessous (on a représenté en gras les coefficients de A et de B utiles au calcul du coefficient c_{ij}) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ik}} & \dots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \mathbf{b_{kj}} & \dots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \mathbf{b_{pj}} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

Remarque

On voit bien que le produit AB de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

On obtient alors une matrice ayant autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

On peut donc résumer en écrivant :

[matrice de type (n,p)] $\times$ [matrice de type (p,q)] $\Rightarrow$ [matrice de type (n,q)].

Propriétés du produit

Soient A, B et C trois matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$:

- Si les produits AB et AC sont possibles, on a : $A(B+C) = AB + AC$.
- Si les produits AC et BC sont possibles, on a : $(A+B)C = AC + BC$.
- Si les produits AB et BC sont possibles, on a : $A(BC) = (AB)C$.

Remarques

- Les produits AB et BA ne sont simultanément possibles que si A est de type (n,p) et B de type (p,n). Alors AB est carrée d'ordre n, tandis que BA est carrée d'ordre p.

  Si $n \neq p$, les matrices AB et BA, de formats différents, ne sauraient être égales.

  Si A et B sont toutes deux carrées d'ordre n, alors AB et BA sont carrées d'ordre n, mais on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B *commutent*.
- L'addition des matrices est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, mais le produit n'est pas une loi sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sauf si $n = p$.

II.3 L'algèbre des matrices de type (n,n)

Proposition

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) +, \times)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$, non commutative si $n \geq 2$.
Le neutre multiplicatif est la matrice identité I_n.

Remarque importante

Si $n \geq 2$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient des *diviseurs de zéro*.

L'égalité $AB = 0$ n'implique donc pas $A = 0$ ou $B = 0$.

De même, les égalités $AB = AC$ ou $BA = CA$ n'impliquent pas nécessairement $B = C$.

Proposition *(Matrices inversibles)*

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la loi produit, appelé *groupe linéaire* d'indice n, et noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarques

- Bien que le produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne soit pas commutatif, l'une des deux égalités $AB = \mathrm{I}_n$ ou $BA = \mathrm{I}_n$ implique l'autre, et donc $B = A^{-1}$.
- Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

  Alors A est inversible $\Leftrightarrow$ A est simplifiable $\Leftrightarrow$ A n'est pas un diviseur de 0.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

– Si A et B sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

– Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut utiliser la formule du binôme $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$, mais à condition que les matrices A et B commutent !
Les matrices scalaires $\lambda \mathrm{I}_n$ commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.4 Calcul des puissances d'une matrice

– **Utilisation de la formule du binôme**

Pour calculer A^n, il est parfois possible d'écrire $A = B+C$, et d'utiliser la formule du binôme, à condition que B et C commutent, et que le calcul des puissances de B et C soit facile.
Cas fréquent : B est une matrice scalaire et C est nilpotente (telle que $C^m = 0$).
On écrira alors, pour tout p : $A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} C^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} C^k = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} C^k$.

– **Utilisation d'une récurrence**

Il arrive que les coefficients des premières puissances de A satisfassent à une formule simple. Il reste à établir si cette formule est vraie pour toutes les puissances de A, à l'aide d'une récurrence.

– **Utilisation d'un polynôme annulateur**

Supposons par exemple qu'une matrice A vérifie $A^3 - 4A^2 + 5A - I = 0 \quad (1)$

On exprime cette situation en disant que $P = \mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} - 1$ est un *polynôme annulateur* de A, l'égalité précédente s'écrivant $P(A) = 0$.

(1) s'écrit $A(A^2 - 4A + 5I) = I$ et prouve que A est inversible avec $A^{-1} = A^2 - 4A + 5I$.

(1) prouve l'existence de suites (α_n), (β_n), et (γ_n) telles que, $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ (par récurrence, ou bien en utilisant la division euclidienne $\mathrm{X}^n = Q_n P + R_n$ et en écrivant $A^n = Q_n(A)P(A) + R_n(A) = R_n(A)$, avec $\deg(R_n) \leq 2$.)

– **Résolution d'un système**

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et X, Y deux matrices colonnes inconnues de hauteur n.
Si le système $AX = Y$ possède une solution unique X en fonction de Y, alors on peut dire que A est inversible.
La solution doit s'exprimer sous la forme $X = BY$, ce qui donne $B = A^{-1}$.

– **Exposants négatifs**

Supposons qu'on ait trouvé une formule donnant $A^n = \varphi(n)$ en fonction de l'entier $n \geq 0$.
On peut chercher à prouver que cette formule est encore valable pour les exposants négatifs, à condition que A soit inversible.
Il suffit alors de prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\varphi(n)\varphi(-n) = \mathrm{I}_n$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

II.5 Cas des matrices triangulaires ou diagonales

Proposition

Toute matrice A triangulaire supérieure est inversible $\Leftrightarrow$ ses coefficients diagonaux a_{ii} sont non nuls.

A^{-1} est alors triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des a_{ii}.

(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

Proposition

Soit A une matrice triangulaire supérieure.

Alors pour tout entier naturel k (et pour tout entier relatif k si A est inversible) A^k est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les a_{ii}^k.

(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

Proposition

Toute matrice A strictement triangulaire est nilpotente.

Plus précisément, si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A^n = 0$.

Remarques

- Une matrice nilpotente, n'est pas nécessairement strictement triangulaire.

  Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$.
- Si une matrice carrée A d'ordre n est nilpotente, on est certain que $A^n = 0$.

  Inversement si A est carrée d'ordre n et si $A^n \neq 0$, toutes ses puissances sont non nulles.

II.6 Transposition

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée* de A et on note ${}^{\mathrm{T}}A$ la matrice B de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ dont le terme général est $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Propriétés

- La transposition est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$dans $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$.
  $\begin{cases} \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, {}^{\mathrm{T}}(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^{\mathrm{T}}A + \mu\, {}^{\mathrm{T}}B \\ \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), {}^{\mathrm{TT}}A = A \end{cases}$
- Si on se restreint à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la transposition est donc un automorphisme involutif.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), {}^{\mathrm{T}}(AB) = {}^{\mathrm{T}}B\, {}^{\mathrm{T}}A$ (Attention à l'ordre !)
- Si A est une matrice carrée inversible, alors ${}^{\mathrm{T}}A$ est inversible et $({}^{\mathrm{T}}A)^{-1} = {}^{\mathrm{T}}(A^{-1})$.
- Pour tout matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout entier naturel k, on a : ${}^{\mathrm{T}}(A^k) = ({}^{\mathrm{T}}A)^k$.

  Si A est inversible, cette égalité est valable pour tout entier relatif k.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

II.7 Matrices symétriques ou antisymétriques

Définition

Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique* si ${}^{\mathrm{T}}A = A$.
Cela équivaut à dire que pour tous indices i et j, $a_{ji} = a_{ij}$.
Autrement dit A est symétrique par rapport à sa diagonale.

Définition

Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *antisymétrique* si ${}^{\mathrm{T}}A = -A$.
Cela équivaut à dire que pour tous indices i et j, $a_{ji} = -a_{ij}$.
Cela implique en particulier que les coefficients diagonaux de A sont nuls.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique. $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 0 & 7 \\ -6 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Propriétés

- Si A est inversible et symétrique alors A^{-1} est symétrique.
  Si A est inversible et antisymétrique alors A^{-1} est antisymétrique.
- Si A est symétrique alors, pour tout entier naturel k, A^k est symétrique.
  Si A est inversible, cette propriété est valable pour tout entier relatif k.
- Si A est antisymétrique, ses puissances paires sont symétriques et ses puissances impaires sont antisymétriques.

Notation

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont symétriques.

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont antisymétriques.

Proposition

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ et celle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $\dfrac{1}{2}n(n-1)$.
Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit donc de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A.
S et A sont respectivement données par : $S = \dfrac{1}{2}(M + {}^{\mathrm{T}}M)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - {}^{\mathrm{T}}M)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

III Matrice d'une application linéaire

III.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dim $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
Soit $(v) = v_1, v_2, \ldots, v_p$ une famille de p vecteurs de E.
Pour tout entier j compris entre 1 et p, posons $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$.
Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}.
A est appelée matrice de la famille (v) dans la base (e).

Interprétation et exemple

Avec ces notations, la j-ième colonne de A est formée des composantes de v dans (e).

Supposons par exemple que $(e) = e_1, e_2, e_3$ soit une base de E (donc $\dim(E) = 3$).

Supposons également que les vecteurs v_1, v_2 soient donnés par : $\begin{cases} v_1 = 3e_1 + 5e_2 + e_3 \\ v_2 = 2e_1 + 4e_2 + 7e_3 \end{cases}$

Alors la matrice de $(v) = v_1, v_2$ dans la base (e) est $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Notation dans un cas particulier

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une base (e), on notera $[u]_e$ la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur u de E dans la base (e).

III.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
On suppose que $\dim(E) = p \geq 1$, et que E est muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_p$.
On suppose que $\dim(F) = n \geq 1$, et que F est muni d'une base $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.
Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle matrice de f dans les bases (e) et (ε) la matrice A de la famille des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)$ dans la base (ε).
Cette matrice, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, est notée $\mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$.

Interprétation et exemple

Pour tout indice j de $\{1, \ldots, p\}$, la j-ième colonne de $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$ est formée des composantes du vecteur $f(e_j)$ dans la base (ε).

Supposons qu'une base de E soit $(e) = e_1, e_2, e_3$, et qu'une base de F soit $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Soit f l'application linéaire de E dans F définie par $\begin{cases} f(e_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ f(e_2) = 7\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 \\ f(e_3) = 3\varepsilon_1 \end{cases}$

Alors la matrice de f dans les bases (e) et (ε) est $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

Cas particulier : Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit f un endomorphisme de E, où $\dim(E) = n \geq 1$. Si on munit E de la même base (e) *au départ* et *à l'arrivée* on parle de la matrice de f dans la base (e).

Cette matrice, carrée d'ordre n, sera notée $\mathcal{M}(f,(e))$.

Proposition *(Interprétation matricielle de l'égalité $v = f(u)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
E est muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_p$ et F est muni d'une base $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.
Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice A dans les bases (e) et (ε).
Pour tout u de E, l'égalité vectorielle $v = f(u)$ équivaut à l'égalité matricielle $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$.

Remarque

Réciproquement, si une application $f : E \to F$ est telle qu'il existe une matrice A telle que pour tout vecteur u de E, $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$, alors f est linéaire et $A = \mathcal{M}(f,(e),(\varepsilon))$.

Exemples

Avec l'exemple précédent, si (x', y') sont les coordonnées dans (ε) de $v = f(u)$, le vecteur u ayant lui-même pour coordonnées (x, y, z) dans (e), on a les équivalences suivantes :

$$v = f(u) \Leftrightarrow [v]_\varepsilon = A[u]_e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 7y + 3z \\ y' = 2x + 5y \end{cases}$$

Réciproquement, soit g l'application qui envoie tout vecteur $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ sur le vecteur $v = x'\varepsilon_1 + y'\varepsilon_2$ avec $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = 9x + 8y + 7z \end{cases}$

Alors g est linéaire et sa matrice dans les bases (e) et (ε) est $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Cela signifie par exemple que $g(e_1) = \varepsilon_1 + 9\varepsilon_2$.

Remarques

- Une application linéaire est déterminée par sa matrice dans un couple de bases donné.
  En supposant toujours que $\dim(E) = p \geq 1$ et $\dim(F) = n \geq 1$, l'application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui à une application linéaire f associe sa matrice dans un couple de bases donné est donc une bijection.
- Soit f une application linéaire de E dans F.
  Quand on change de base dans E ou dans F, la matrice de f est en général modifiée.
  On analysera plus loin cette dépendance en fonction du couple de bases.
- Cas particulier : la matrice de l'application nulle de E dans F est la matrice nulle, et ceci quelque soit le couple de bases.
- La matrice de Id_E dans une base (e) de E est la matrice identité, quelque soit la base (e).
  Mais attention, la matrice de Id_E n'est pas la matrice identité si on utilise une certaine base *au départ* et une autre base *à l'arrivée*.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.

– A toute application linéaire f de E (de dimension $p \geq 1$) vers F (de dimension $n \geq 1$) correspond une matrice unique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dans un couple de bases donné.
Inversement, A dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ peut représenter une infinité d'applications linéaires :
- On a en effet le choix des espaces E (de dimension p) et F (de dimension n).
- On a ensuite le choix d'une base de E et d'une base de F.
Si rien n'est imposé, on prend $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, munis de leur base canonique.

III.3 Propriétés opératoires

Proposition *(Matrice de $\lambda f + \mu g$)*

On suppose que $\dim(E) = p \geq 1$ et que $\dim(F) = n \geq 1$.
L'application de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui à f associe sa matrice dans un couple de bases est linéaire (c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels) :
$\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$
$\mathcal{M}(\alpha f + \beta g,(e),(\varepsilon)) = \alpha \mathcal{M}(f,(e),(\varepsilon)) + \beta \mathcal{M}(g,(e),(\varepsilon))$.

Proposition *(Matrice de la composée $g \circ f$)*

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, munis des bases (α), (β), et (γ).
Soit $f : E \to F$, linéaire, de matrice A dans les bases (α) et (β).
Soit $g : F \to G$, linéaire, de matrice B dans les bases (β) et (γ).
Alors la matrice de $g \circ f$, dans les bases (e) et (ε), est BA.
Autrement dit : $\mathcal{M}(gof,(\alpha),(\gamma)) = \mathcal{M}(g,(\beta),(\gamma)) \times \mathcal{M}(f,(\alpha),(\beta))$.

Proposition *(Matrice de f^{-1})*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension $n \geq 1$.
On suppose que E est muni de la base (e), et que F est muni de la base (ε).
Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice A dans les bases (e) et (ε).
f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ A est inversible.
La matrice de f^{-1} dans les bases (ε) et (e) est alors A^{-1}.

Proposition *(Matrice de f^n)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).
Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans la base (e).
Pour tout entier naturel k, la matrice de f^k dans la base (e) est A^k.
Cette propriété s'étend aux exposants k négatifs si f est un automorphisme de E, c'est-à-dire si A est inversible.

Remarque *(Matrice d'une application nilpotente)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).
Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans la base (e).
Alors f est nilpotente $\Leftrightarrow$ A est nilpotente.
Si f est nilpotente, il existe même une base (ε) de E dans laquelle la matrice de f est strictement triangulaire supérieure.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 31 pages.