Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Matrices à coefficients dans K

I.1 Généralités

Définition *(matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$)*

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

Une *matrice* A de type (n,p) est une application de $\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,p\}$ dans $\mathbb{K}$.

On note souvent $a_{i,j}$ l'image du couple (i,j) par l'application A.

Les a_{ij} sont appelés les *coefficients* de la matrice A.

On écrit alors $A=(a_{i,j})_{i=1..n,j=1..p}$, ou plus simplement $A=(a_{ij})$.

Notations

- On note $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Pour décrire un élément A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on dispose les coefficients dans un tableau à n lignes et p colonnes, le coefficient $a_{i,j}$ venant se placer à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- Par exemple, la matrice A de type $(3,2)$ définie par :

  $a_{1,1}=5$, $a_{1,2}=3$, $a_{2,1}=0$, $a_{2,2}=7$, $a_{3,1}=4$ et $a_{3,2}=1$ se note $A=\begin{pmatrix}5&3\\0&7\\4&1\end{pmatrix}$.
- Finalement, c'est ce tableau lui-même qu'on finit par appeler une matrice.

  On dit donc qu'un élément M de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est une matrice à n lignes et à p colonnes.

I.2 Matrices particulières

- **Matrice nulle**

  La *matrice nulle* $A=(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est définie par : $\forall(i,j), a_{i,j}=0$.
- **Matrices carrées**

  On appelle *matrice carrée* d'ordre n toute matrice de type (n,n).

  On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- **Diagonale d'une matrice carrée**

  Les coefficients $a_{i,i}$ (l'indice de colonne est égal à l'indice de ligne) d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont appelés *coefficients diagonaux*.

  Ils forment ce qu'on appelle la *diagonale* de A.

  Les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i>j$ sont donc *en dessous* de cette diagonale, alors que les coefficients $a_{i,j}$ tels que $j>i$ sont *au dessus* de celle-ci.
- **Matrices-ligne**

  Les éléments de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelés *matrices-ligne*.

On peut identifier un élément $(a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_p)$ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ avec le n-uplet correspondant $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ de $\mathbb{K}^p$.

– **Matrices-colonne**

Les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelés *matrices-colonne*.

On identifie parfois une telle matrice-colonne avec un élément de $\mathbb{K}^n$.

I.3 Matrices carrées particulières

– **Matrices diagonales**

Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonale* si pour tous indices distincts i et j, $a_{i,j} = 0$: seuls sont éventuellement non nuls les éléments diagonaux de A.

– **Matrice identité**

La *matrice identité d'ordre* n est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ valent 1. Cette matrice est notée I_n.

On remarque que pour tous indices i et j, $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (notation de Kronecker).

– **Matrices scalaires**

Les matrices de la forme $A = \lambda I_n$, c'est-à-dire les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux, sont dites *matrices scalaires*.

– **Matrices triangulaires**

Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *triangulaire supérieure* si pour tous i et j tels que $i > j$, alors $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls.

La matrice A est dite *triangulaire inférieure* si pour tout i, j tel que $i < j$ on a $a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire si tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont nuls.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

– **Matrices strictement triangulaires**

Une matrice carrée A est dite strictement triangulaire si elle est triangulaire et si de plus ses coefficients diagonaux sont nuls.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est strictement triangulaire supérieure.

II Opérations sur les matrices

II.1 L'espace vectoriel des matrices de type (p,k)

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, et λ un scalaire.
On définit les matrices $C = A + B$ et $D = \lambda A$ de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, de la manière suivante :
Pour tous indices i et j, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ et $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Propriétés

- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un groupe commutatif pour la loi $+$.
  L'élément neutre est la matrice nulle, notée 0.
  L'opposée de la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice $-A = (-a_{ij})$.
- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension np.
  Une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, dite *base canonique*, est formée par les np matrices E_{ij} (tous les coefficients de E_{ij} sont nuls sauf celui d'indice i, j qui vaut 1).
  Plus précisément, si $M = (a_{ij})$, alors $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, E_{ij}$.

II.2 Produit des matrices

Définition

Soient $A = (a_{ik})$ une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{kj})$ une matrice de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $C = AB$, élément de $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$, de la manière suivante :
Pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, pour tout j de $\{1, \ldots, q\}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$.

Interprétation

Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de $C = AB$ est donc obtenu en sommant les produits des termes de même rang dans la i-ième ligne de A et dans la j-ième colonne de B, selon le schéma ci-dessous (on a représenté en gras les coefficients de A et de B utiles au calcul du coefficient c_{ij}) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & \mathbf{a_{ik}} & \ldots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \mathbf{b_{1j}} & \ldots & b_{1q} \\ b_{21} & \ldots & \mathbf{b_{2j}} & \ldots & b_{2q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & \mathbf{b_{kj}} & \ldots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & \mathbf{b_{pj}} & \ldots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & \mathbf{c_{ij}} & \ldots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nj} & \ldots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Remarque

On voit bien que le produit AB de deux matrices A et B n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

On obtient alors une matrice ayant autant de lignes que A et autant de colonnes que B.
On peut donc résumer en écrivant :
[matrice de type (n, p)] $\times$ [matrice de type (p, q)] $\Rightarrow$ [matrice de type (n, q)].

Propriétés du produit

Soient A, B et C trois matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$:

- Si les produits AB et AC sont possibles, on a : $A(B + C) = AB + AC$.
- Si les produits AC et BC sont possibles, on a : $(A + B)C = AC + BC$.
- Si les produits AB et BC sont possibles, on a : $A(BC) = (AB)C$.

Remarques

- Les produits AB et BA ne sont simultanément possibles que si A est de type (n, p) et B de type (p, n). Alors AB est carrée d'ordre n, tandis que BA est carrée d'ordre p.

  Si $n \neq p$, les matrices AB et BA, de formats différents, ne sauraient être égales.
  Si A et B sont toutes deux carrées d'ordre n, alors AB et BA sont carrées d'ordre n, mais on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B *commutent*.
- L'addition des matrices est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, mais le produit n'est pas une loi sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sauf si $n = p$.

II.3 L'algèbre des matrices de type (n,n)

Proposition

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) +, \times)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$, non commutative si $n \geq 2$.
Le neutre multiplicatif est la matrice identité I_n.

Remarque importante

Si $n \geq 2$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient des *diviseurs de zéro*.
L'égalité $AB = 0$ n'implique donc pas $A = 0$ ou $B = 0$.
De même, les égalités $AB = AC$ ou $BA = CA$ n'impliquent pas nécessairement $B = C$.

Proposition *(Matrices inversibles)*

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la loi produit, appelé *groupe linéaire* d'indice n, et noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarques

- Bien que le produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne soit pas commutatif, l'une des deux égalités $AB = \mathrm{I}_n$ ou $BA = \mathrm{I}_n$ implique l'autre, et donc $B = A^{-1}$.
- Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Alors A est inversible $\Leftrightarrow$ A est simplifiable $\Leftrightarrow$ A n'est pas un diviseur de 0.

– Si A et B sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
– Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut utiliser la formule du binôme $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k\, B^{p-k}$, mais à condition que les matrices A et B commutent !
Les matrices scalaires $\lambda \mathrm{I}_n$ commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.4 Calcul des puissances d'une matrice

– **Utilisation de la formule du binôme**
Pour calculer A^n, il est parfois possible d'écrire $A = B+C$, et d'utiliser la formule du binôme, à condition que B et C commutent, et que le calcul des puissances de B et C soit facile.
Cas fréquent : B est une matrice scalaire et C est nilpotente (telle que $C^m = 0$).
On écrira alors, pour tout p : $A^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} C^k\, B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} C^k = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} C^k$.
– **Utilisation d'une récurrence**
Il arrive que les coefficients des premières puissances de A satisfassent à une formule simple. Il reste à établir si cette formule est vraie pour toutes les puissances de A, à l'aide d'une récurrence.

– **Utilisation d'un polynôme annulateur**
Supposons par exemple qu'une matrice A vérifie $A^3 - 4A^2 + 5A - I = 0 \quad (1)$
On exprime cette situation en disant que $P = \mathrm{X}^3 - 4\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} - 1$ est un *polynôme annulateur* de A, l'égalité précédente s'écrivant $P(A) = 0$.
(1) s'écrit $A(A^2 - 4A + 5I) = I$ et prouve que A est inversible avec $A^{-1} = A^2 - 4A + 5I$.
(1) prouve l'existence de suites (α_n), (β_n), et (γ_n) telles que, $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$ (par récurrence, ou bien en utilisant la division euclidienne $\mathrm{X}^n = Q_n P + R_n$ et en écrivant $A^n = Q_n(A)P(A) + R_n(A) = R_n(A)$, avec $\deg(R_n) \leq 2$.)

– **Résolution d'un système**
Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et X, Y deux matrices colonnes inconnues de hauteur n.
Si le système $AX = Y$ possède une solution unique X en fonction de Y, alors on peut dire que A est inversible.
La solution doit s'exprimer sous la forme $X = BY$, ce qui donne $B = A^{-1}$.

– **Exposants négatifs**
Supposons qu'on ait trouvé une formule donnant $A^n = \varphi(n)$ en fonction de l'entier $n \geq 0$.
On peut chercher à prouver que cette formule est encore valable pour les exposants négatifs, à condition que A soit inversible.
Il suffit alors de prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\varphi(n)\varphi(-n) = \mathrm{I}_n$.

II.5 Cas des matrices triangulaires ou diagonales

Proposition

Toute matrice A triangulaire supérieure est inversible $\Leftrightarrow$ ses coefficients diagonaux a_{ii} sont non nuls.
A^{-1} est alors triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des a_{ii}.
(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

Proposition

Soit A une matrice triangulaire supérieure.
Alors pour tout entier naturel k (et pour tout entier relatif k si A est inversible) A^k est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les a_{ii}^k.
(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

Proposition

Toute matrice A strictement triangulaire est nilpotente.
Plus précisément, si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $A^n = 0$.

Remarques

– Une matrice nilpotente, n'est pas nécessairement strictement triangulaire.
Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$.

– Si une matrice carrée A d'ordre n est nilpotente, on est certain que $A^n = 0$.
Inversement si A est carrée d'ordre n et si $A^n \neq 0$, toutes ses puissances sont non nulles.

II.6 Transposition

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée* de A et on note ${}^{\mathrm{T}}\!A$ la matrice B de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ dont le terme général est $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^{\mathrm{T}}\!A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Propriétés

– La transposition est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$dans $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$.
$\begin{cases} \forall (A,B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, {}^{\mathrm{T}}(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^{\mathrm{T}}\!A + \mu {}^{\mathrm{T}}\!B \\ \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), {}^{\mathrm{T}\mathrm{T}}\!A = A \end{cases}$

– Si on se restreint à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la transposition est donc un automorphisme involutif.

– $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), {}^{\mathrm{T}}(AB) = {}^{\mathrm{T}}\!B\,{}^{\mathrm{T}}\!A$ (Attention à l'ordre !)

– Si A est une matrice carrée inversible, alors ${}^{\mathrm{T}}\!A$ est inversible et $({}^{\mathrm{T}}\!A)^{-1} = {}^{\mathrm{T}}(A^{-1})$.

– Pour tout matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout entier naturel k, on a : ${}^{\mathrm{T}}(A^k) = ({}^{\mathrm{T}}\!A)^k$.
Si A est inversible, cette égalité est valable pour tout entier relatif k.

II.7 Matrices symétriques ou antisymétriques

Définition

Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *symétrique* si ${}^{\mathrm{T}}A = A$.
Cela équivaut à dire que pour tous indices i et j, $a_{ji} = a_{ij}$.
Autrement dit A est symétrique par rapport à sa diagonale.

Définition

Une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *antisymétrique* si ${}^{\mathrm{T}}A = -A$.
Cela équivaut à dire que pour tous indices i et j, $a_{ji} = -a_{ij}$.
Cela implique en particulier que les coefficients diagonaux de A sont nuls.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ est symétrique. } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 0 & 7 \\ -6 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

Propriétés

- Si A est inversible et symétrique alors A^{-1} est symétrique.
  Si A est inversible et antisymétrique alors A^{-1} est antisymétrique.
- Si A est symétrique alors, pour tout entier naturel k, A^k est symétrique.
  Si A est inversible, cette propriété est valable pour tout entier relatif k.
- Si A est antisymétrique, ses puissances paires sont symétriques et ses puissances impaires sont antisymétriques.

Notation

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont symétriques.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont antisymétriques.

Proposition

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ et celle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est $\dfrac{1}{2}n(n-1)$.
Toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit donc de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique A.
S et A sont respectivement données par : $S = \dfrac{1}{2}(M + {}^{\mathrm{T}}M)$ et $A = \dfrac{1}{2}(M - {}^{\mathrm{T}}M)$.

III Matrice d'une application linéaire

III.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dim $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Soit $(v) = v_1, v_2, \ldots, v_p$ une famille de p vecteurs de E.

Pour tout entier j compris entre 1 et p, posons $v_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de terme général a_{ij}.

A est appelée matrice de la famille (v) dans la base (e).

Interprétation et exemple

Avec ces notations, la j-ième colonne de A est formée des composantes de v dans (e).

Supposons par exemple que $(e) = e_1, e_2, e_3$ soit une base de E (donc $\dim(E) = 3$).

Supposons également que les vecteurs v_1, v_2 soient donnés par : $\begin{cases} v_1 = 3e_1 + 5e_2 + e_3 \\ v_2 = 2e_1 + 4e_2 + 7e_3 \end{cases}$

Alors la matrice de $(v) = v_1, v_2$ dans la base (e) est $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Notation dans un cas particulier

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, muni d'une base (e), on notera $[u]_e$ la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur u de E dans la base (e).

III.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

On suppose que $\dim(E) = p \geq 1$, et que E est muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_p$.

On suppose que $\dim(F) = n \geq 1$, et que F est muni d'une base $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Soit f une application linéaire de E dans F.

On appelle matrice de f dans les bases (e) et (ε) la matrice A de la famille des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p)$ dans la base (ε).

Cette matrice, élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, est notée $\mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$.

Interprétation et exemple

Pour tout indice j de $\{1, \ldots, p\}$, la j-ième colonne de $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$ est formée des composantes du vecteur $f(e_j)$ dans la base (ε).

Supposons qu'une base de E soit $(e) = e_1, e_2, e_3$, et qu'une base de F soit $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Soit f l'application linéaire de E dans F définie par $\begin{cases} f(e_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ f(e_2) = 7\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 \\ f(e_3) = 3\varepsilon_1 \end{cases}$

Alors la matrice de f dans les bases (e) et (ε) est $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Cas particulier : Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit f un endomorphisme de E, où $\dim(E) = n \geq 1$. Si on munit E de la même base (e) *au départ* et *à l'arrivée* on parle de la matrice de f dans la base (e).

Cette matrice, carrée d'ordre n, sera notée $\mathcal{M}(f, (e))$.

Proposition *(Interprétation matricielle de l'égalité $v = f(u)$)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
E est muni d'une base $(e) = e_1, \ldots, e_p$ et F est muni d'une base $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.
Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice A dans les bases (e) et (ε).
Pour tout u de E, l'égalité vectorielle $v = f(u)$ équivaut à l'égalité matricielle $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$.

Remarque

Réciproquement, si une application $f : E \to F$ est telle qu'il existe une matrice A telle que pour tout vecteur u de E, $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$, alors f est linéaire et $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$.

Exemples

Avec l'exemple précédent, si (x', y') sont les coordonnées dans (ε) de $v = f(u)$, le vecteur u ayant lui-même pour coordonnées (x, y, z) dans (e), on a les équivalences suivantes :

$$v = f(u) \Leftrightarrow [v]_\varepsilon = A[u]_e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 7y + 3z \\ y' = 2x + 5y \end{cases}$$

Réciproquement, soit g l'application qui envoie tout vecteur $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ sur le vecteur $v = x'\varepsilon_1 + y'\varepsilon_2$ avec $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = 9x + 8y + 7z \end{cases}$

Alors g est linéaire et sa matrice dans les bases (e) et (ε) est $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Cela signifie par exemple que $g(e_1) = \varepsilon_1 + 9\varepsilon_2$.

Remarques

– Une application linéaire est déterminée par sa matrice dans un couple de bases donné.
En supposant toujours que $\dim(E) = p \geq 1$ et $\dim(F) = n \geq 1$, l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui à une application linéaire f associe sa matrice dans un couple de bases donné est donc une bijection.

– Soit f une application linéaire de E dans F.
Quand on change de base dans E ou dans F, la matrice de f est en général modifiée.
On analysera plus loin cette dépendance en fonction du couple de bases.

– Cas particulier : la matrice de l'application nulle de E dans F est la matrice nulle, et ceci quelque soit le couple de bases.

– La matrice de Id_E dans une base (e) de E est la matrice identité, quelque soit la base (e).
Mais attention, la matrice de Id_E n'est pas la matrice identité si on utilise une certaine base *au départ* et une autre base *à l'arrivée*.

– A toute application linéaire f de E (de dimension $p \geq 1$) vers F (de dimension $n \geq 1$) correspond une matrice unique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dans un couple de bases donné.
Inversement, A dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ peut représenter une infinité d'applications linéaires :
- On a en effet le choix des espaces E (de dimension p) et F (de dimension n).
- On a ensuite le choix d'une base de E et d'une base de F.
Si rien n'est imposé, on prend $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, munis de leur base canonique.

III.3 Propriétés opératoires

Proposition *(Matrice de $\lambda f + \mu g$)*

On suppose que $\dim(E) = p \geq 1$ et que $\dim(F) = n \geq 1$.
L'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui à f associe sa matrice dans un couple de bases est linéaire (c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels) :
$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$
$$\mathcal{M}(\alpha f + \beta g, (e), (\varepsilon)) = \alpha \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon)) + \beta \mathcal{M}(g, (e), (\varepsilon)).$$

Proposition *(Matrice de la composée $g \circ f$)*

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, munis des bases (α), (β), et (γ).
Soit $f : E \rightarrow F$, linéaire, de matrice A dans les bases (α) et (β).
Soit $g : F \rightarrow G$, linéaire, de matrice B dans les bases (β) et (γ).
Alors la matrice de $g \circ f$, dans les bases (e) et (ε), est BA.
Autrement dit : $\mathcal{M}(gof, (\alpha), (\gamma)) = \mathcal{M}(g, (\beta), (\gamma)) \times \mathcal{M}(f, (\alpha), (\beta))$.

Proposition *(Matrice de f^{-1})*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension $n \geq 1$.
On suppose que E est muni de la base (e), et que F est muni de la base (ε).
Soit f une application linéaire de E dans F, de matrice A dans les bases (e) et (ε).
f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ A est inversible.
La matrice de f^{-1} dans les bases (ε) et (e) est alors A^{-1}.

Proposition *(Matrice de f^n)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).
Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans la base (e).
Pour tout entier naturel k, la matrice de f^k dans la base (e) est A^k.
Cette propriété s'étend aux exposants k négatifs si f est un automorphisme de E, c'est-à-dire si A est inversible.

Remarque *(Matrice d'une application nilpotente)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).
Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans la base (e).
Alors f est nilpotente $\Leftrightarrow$ A est nilpotente.
Si f est nilpotente, il existe même une base (ε) de E dans laquelle la matrice de f est strictement triangulaire supérieure.