



# Table des matières

I	Produit scalaire . . . . .	2
I.1	Définition et premières propriétés . . . . .	2
I.2	Exemples classiques . . . . .	3
I.3	Norme et distance associées à un produit scalaire . . . . .	3
I.4	Relations entre le produit scalaire et la norme associée . . . . .	4
II	Orthogonalité . . . . .	4
II.1	Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux . . . . .	4
II.2	Produits scalaires et familles orthonormales . . . . .	5
II.3	Orthogonal d'une partie de E . . . . .	7
II.4	Projections orthogonales dans un espace euclidien . . . . .	9
III	Isométries et matrices orthogonales . . . . .	10
III.1	Automorphismes orthogonaux . . . . .	10
III.2	Matrices orthogonales . . . . .	11
III.3	Les groupes $SO(E)$ et $SO(n)$ . . . . .	13

# I Produit scalaire

Dans ce chapitre,  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

## I.1 Définition et premières propriétés

**Définition** (*Produit scalaire*)

On dit que l'application  $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  est un *produit scalaire* si :

◇ (a)  $\forall (u, u', v, v') \in E^4, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$

$f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v)$  : on dit que  $f$  est *linéaire à gauche*.

$f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v')$  : on dit que  $f$  est *linéaire à droite*.

◇ (b)  $\forall (u, v) \in E^2, f(v, u) = f(u, v)$  : on dit que  $f$  est *symétrique*.

◇ (c)  $\forall u \in E, f(u, u) \in \mathbb{R}^+$  : on dit que  $f$  est *positive*.

◇ (d)  $\forall u \in E, f(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$  : on dit que  $f$  est *définie*.

**Définition** (*Espace euclidien*)

Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien réel*.

Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

**Remarques**

- La propriété (a) s'énonce en disant que  $f$  est *bilinéaire*.
- Un produit scalaire sur  $E$  est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive.
- Si le caractère symétrique de  $f$  est établi, la linéarité à droite équivaut à la linéarité à gauche : le point (a) de la définition peut alors être simplifié.
- Plutôt que de noter  $f(u, v)$ , on note souvent  $\langle u, v \rangle$ , ou  $u \cdot v$ , ou  $(u | v)$ .

Avec la notation  $(\cdot | \cdot)$ , que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient :

$\forall (u, u', v, v') \in E^4, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha u + \beta u' | v) = \alpha (u | v) + \beta (u' | v) \\ (u | \alpha v + \beta v') = \alpha (u | v) + \beta (u | v') \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (u | \alpha v + \beta v') = \alpha (u | v) + \beta (u | v') \end{array} \right.$$

$$(v | u) = (u | v) \quad ; \quad (u | u) \geq 0 \quad ; \quad (u | u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$$

- Si  $E$  est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est encore euclidien, avec la restriction du produit scalaire.

**Proposition** (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Soit  $(\cdot | \cdot)$  un produit scalaire sur  $E$ .

Alors  $\forall (u, v) \in E^2, (u | v)^2 \leq (u | u)(v | v)$ .

De plus, il y a égalité  $\Leftrightarrow u$  et  $v$  sont liés.

## I.2 Exemples classiques

### Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Soient  $u = (x_1, \dots, x_n)$  et  $v = (y_1, \dots, y_n)$  deux éléments quelconques de  $\mathbb{R}^n$ .

L'application  $(u, v) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$  est le *produit scalaire canonique* de  $\mathbb{R}^n$ .

“Cauchy-Schwarz” s’écrit alors :  $\left\{ \begin{array}{l} \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{array} \right., \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2$ .

Si on note  $[u]$  la matrice-colonne associée à tout vecteur  $u$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $(u | v) = {}^T[u][v]$ .

### Un produit scalaire entre applications continues

Soit  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  l’espace vectoriel des applications continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , avec  $a < b$ .

L'application  $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t) g(t) dt$  est un produit scalaire.

“Cauchy-Schwarz” s’écrit alors :  $\forall (f, g) \in E^2, \left( \int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt$

### Un produit scalaire entre applications continues périodiques

Soit  $E$  est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continues et  $2\pi$ -périodiques.

L'application  $(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$  est un produit scalaire sur  $E$ .

## I.3 Norme et distance associées à un produit scalaire

### Proposition (Norme euclidienne associée à un produit scalaire)

Soit  $(\cdot | \cdot)$  un produit scalaire sur  $E$ . On pose :  $\forall u \in E, \|u\| = \sqrt{(u | u)}$ .

Cette application vérifie :

◇  $\forall u \in E, \|u\| \geq 0$ , et  $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$ .

◇  $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ .

◇  $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (*inégalité triangulaire*, ou de *Minkowski*.)

On exprime ces propriétés en disant que l’application  $x \mapsto \|x\|$  est une *norme* sur  $E$ .

On l’appelle *norme euclidienne* associée au (ou déduite du) produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ .

### Remarques

– L’inégalité de Cauchy-Schwarz s’écrit maintenant :  $\forall (u, v) \in E^2, |(u | v)| \leq \|u\| \|v\|$ .

– Pour tous vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$ , on a :  $\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u \pm v\|$ .

– Avec nos deux premiers exemples de produit scalaire, les normes associées s’écrivent :

Sur  $\mathbb{R}^n$  :  $\|u\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ , et sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  :  $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$ .

**Définition** (*Distance associée à un produit scalaire*)

Soit  $(\cdot | \cdot)$  un produit scalaire sur  $E$ , et soit  $u \mapsto \|u\|$  la norme associée.

L'application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $d(u, v) = \|u - v\|$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall (u, v, w) \in E^3, \quad \begin{cases} d(u, v) = d(v, u) ; & d(u, v) \geq 0 ; & d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) & \text{(inégalité triangulaire)} \end{cases}$$

On exprime ces propriétés en disant que l'application  $d$  est une *distance*, dite associée à la norme euclidienne, et donc au produit scalaire.

## I.4 Relations entre le produit scalaire et la norme associée

**Proposition** (*Identités du parallélogramme et de polarisation*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ .

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ on a : } \|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta (u | v) + \beta^2 \|v\|^2.$$

$$\text{En particulier, } \begin{cases} \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u | v) + \|v\|^2 \\ \|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2(u | v) + \|v\|^2 \end{cases}$$

Par addition, on en déduit :  $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ .

Cette égalité est connue sous le nom d'*identité du parallélogramme*.

On a également les *identités de polarisation*, qui permettent d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme euclidienne :

$$\forall (u, v) \in E^2, (u | v) = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

## II Orthogonalité

$E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  et de la norme associée.

### II.1 Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux

**Définition**

Un vecteur  $u$  de  $E$  est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si  $\|u\| = 1$ .

Deux vecteurs  $u$  et  $v$  de  $E$  sont dits *orthogonaux* si  $(u | v) = 0$ .

**Remarques**

- Ces notions dépendent évidemment du produit scalaire utilisé sur  $E$ .  
Si on en change, les vecteurs qui étaient orthogonaux ne le sont donc plus nécessairement.
- Si  $u \neq \vec{0}$ , les vecteurs  $\pm \frac{u}{\|u\|}$  sont unitaires, et ce sont les seuls de la droite  $\mathbb{R}u$ .
- La définition de l'orthogonalité est symétrique car  $(v | u) = (u | v)$ .

- Le seul vecteur  $u$  qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.  
A fortiori, le seul vecteur  $u$  qui est orthogonal à tous les vecteurs de  $E$  est  $u = \vec{0}$ .

**Définition** (*Familles orthogonales ou orthonormales*)

On dit qu'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est *orthogonale* si les  $u_i$  sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, alors la famille est dite *orthonormale*.

**Définition** (*Bases et repères orthonormaux*)

Soit  $(e) = e_1, \dots, e_n$  une base de  $E$ .  
Si c'est une famille orthonormale, on dit que c'est une *base orthonormale* de  $E$ .  
Un repère cartésien  $(\Omega, (e))$  est dit *orthonormal* si la base  $(e)$  est orthonormale.

**Remarques et propriétés**

- La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est orthonormale  $\Leftrightarrow \forall (i, j) \in I^2, (u_i | u_j) = \delta_{ij}$  (Kronecker).
- Si la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, c'est une famille libre. C'est le cas en particulier d'une famille  $(u_i)_{i \in I}$  orthonormale.  
Si  $\dim E = n \geq 1$ , une famille orthonormale de  $n$  vecteurs est une base orthonormale.
- La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est une base orthonormale, pour le produit scalaire canonique.
- Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , muni d'une base  $(e) = e_1, \dots, e_n$ .  
Pour tous vecteurs  $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  et  $v = \sum_{k=1}^n y_k e_k$  de  $E$ , on pose  $(u | v) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .  
On définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ , pour lequel la base  $(e)$  est orthonormale.
- Si la famille  $(u_k)_{1 \leq k \leq p}$  est orthogonale, alors  $\left\| \sum_{k=1}^p u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^p \|u_k\|^2$  (*Relation de Pythagore.*)  
La réciproque n'est vraie que si  $p = 2$ . Ainsi  $(u | v) = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .

## II.2 Produits scalaires et familles orthonormales

**Proposition** (*Procédé d'orthonormalisation de Schmidt*)

Dans tout espace vectoriel euclidien  $E$ , il y a des bases orthonormales.

Plus précisément, soit  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  une base de  $E$ .

Alors il existe une et une seule base orthonormale  $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$  telle que :

- $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{Vect} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} = \text{Vect} \{e_1, \dots, e_k\}$
- $\forall k \in \{1, \dots, n\}, (\varepsilon_k | e_k) > 0$

Cette base orthonormale  $(\varepsilon)$  est obtenue de la manière suivante :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{2, \dots, n\}, \varepsilon_k = \frac{1}{\|u_k\|} u_k \quad \text{où} \quad u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j | e_k) \varepsilon_j$$