Table des matières

I Produit scalaire 2
I.1 Définition et premières propriétés 2
I.2 Exemples classiques 3
I.3 Norme et distance associées à un produit scalaire 3
I.4 Relations entre le produit scalaire et la norme associée 4
II Orthogonalité 4
II.1 Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux 4
II.2 Produits scalaires et familles orthonormales 5
II.3 Orthogonal d'une partie de E 7
II.4 Projections orthogonales dans un espace euclidien 9
III Isométries et matrices orthogonales 10
III.1 Automorphismes orthogonaux 10
III.2 Matrices orthogonales 11
III.3 Les groupes SO(E) et SO(n) 13

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

I Produit scalaire

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

I.1 Définition et premières propriétés

Définition *(Produit scalaire)*

On dit que l'application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est un *produit scalaire* si :

- ◇ (a) $\forall (u,u',v,v') \in E^4$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,
  $f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u,v) + \beta f(u',v)$: on dit que f est *linéaire à gauche*.
  $f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u,v) + \beta f(u,v')$: on dit que f est *linéaire à droite*.
- ◇ (b) $\forall (u,v) \in E^2$, $f(v,u) = f(u,v)$: on dit que f est *symétrique*.
- ◇ (c) $\forall u \in E$, $f(u,u) \in \mathbb{R}^+$: on dit que f est *positive*.
- ◇ (d) $\forall u \in E$, $f(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$: on dit que f est *définie*.

Définition *(Espace euclidien)*

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien réel*.
Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarques

- La propriété (a) s'énonce en disant que f est *bilinéaire*.
- Un produit scalaire sur E est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive.
- Si le caractère symétrique de f est établi, la linéarité à droite équivaut à la linéarité à gauche : le point (a) de la définition peut alors être simplifié.
- Plutôt que de noter $f(u,v)$, on note souvent $< u,v >$, ou $u \cdot v$, ou $(u \mid v)$.
  Avec la notation $(\cdot \mid \cdot)$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient :
  $\forall (u,u',v,v') \in E^4$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$
  $$\begin{cases} (\alpha u + \beta u' \mid v) = \alpha (u \mid v) + \beta (u' \mid v) \\ (u \mid \alpha v + \beta v') = \alpha (u \mid v) + \beta (u \mid v') \\ (v \mid u) = (u \mid v) \quad ; \quad (u \mid u) \geq 0 \quad ; \quad (u \mid u) = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0} \end{cases}$$
- Si E est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel F de E est encore euclidien, avec la restriction du produit scalaire.

Proposition *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur E.
Alors $\forall (u,v) \in E^2$, $(u \mid v)^2 \leq (u \mid u)(v \mid v)$.
De plus, il y a égalité $\Leftrightarrow$ u et v sont liés.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

I.2 Exemples classiques

Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Soient $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^n$.

L'application : $(u, v) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$ est le *produit scalaire canonique* de $\mathbb{R}^n$.

"Cauchy-Schwarz" s'écrit alors : $\begin{cases} \forall\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \forall\, (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \end{cases}$, $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2$.

Si on note $[u]$ la matrice-colonne associée à tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, alors $(u \mid v) = {}^{\mathsf{T}}[u]\,[v]$.

Un produit scalaire entre applications continues

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

L'application $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

"Cauchy-Schwarz" s'écrit alors : $\forall\, (f, g) \in E^2$, $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t \int_a^b g(t)^2\, \mathrm{d}t$

Un produit scalaire entre applications continues périodiques

Soit E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues et 2π-périodiques.

L'application $(f, g) \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

I.3 Norme et distance associées à un produit scalaire

Proposition *(Norme euclidienne associée à un produit scalaire)*

Soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur E. On pose : $\forall\, u \in E,\ \|u\| = \sqrt{(u \mid u)}$.
Cette application vérifie :
◇ $\forall\, u \in E,\ \|u\| \geq 0$, et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$.
◇ $\forall\, u \in E,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$.
◇ $\forall\, (u, v) \in E^2,\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (*inégalité triangulaire*, ou de *Minkowski*.)
On exprime ces propriétés en disant que l'application $x \mapsto \|x\|$ est une *norme* sur E.
On l'appelle norme *euclidienne* associée au (ou déduite du) produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

Remarques

– L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit maintenant : $\forall\, (u, v) \in E^2,\ |(u \mid v)| \leq \|u\|\ \|v\|$.

– Pour tous vecteurs u et v de E, on a : $\Big|\ \|u\| - \|v\|\ \Big| \leq \|u \pm v\|$.

– Avec nos deux premiers exemples de produit scalaire, les normes associées s'écrivent :

Sur $\mathbb{R}^n$: $\|u\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: $\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f(t)^2\, \mathrm{d}t}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

Définition *(Distance associée à un produit scalaire)*

Soit $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur E, et soit $u \mapsto \|u\|$ la norme associée.

L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$, définie par $d(u,v) = \|u - v\|$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall\,(u,v,w) \in E^3,\quad \begin{cases} d(u,v) = d(v,u)\ ; \quad d(u,v) \geq 0\ ; \quad d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \quad \textit{(inégalité triangulaire)} \end{cases}$$

On exprime ces propriétés en disant que l'application d est une *distance*, dite associée à la norme euclidienne, et donc au produit scalaire.

I.4 Relations entre le produit scalaire et la norme associée

Proposition *(Identités du parallélogramme et de polarisation)*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.

$\forall\,(u,v) \in E^2,\ \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ on a : $\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2 \|u\|^2 + 2\alpha\beta\,(u \mid v) + \beta^2 \|v\|^2$.

En particulier, $\begin{cases} \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u \mid v) + \|v\|^2 \\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\,(u \mid v) + \|v\|^2 \end{cases}$

Par addition, on en déduit : $\forall\,(u,v) \in E^2,\ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

Cette égalité est connue sous le nom d'*identité du parallélogramme*.

On a également les *identités de polarisation*, qui permettent d'exprimer le produit scalaire en fonction de la norme euclidienne :

$\forall\,(u,v) \in E^2,\ (u \mid v) = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

II Orthogonalité

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ et de la norme associée.

II.1 Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux

Définition

Un vecteur u de E est dit *unitaire* (ou encore *normé*) si $\|u\| = 1$.

Deux vecteurs u et v de E sont dits *orthogonaux* si $(u \mid v) = 0$.

Remarques

- Ces notions dépendent évidemment du produit scalaire utilisé sur E.
  Si on en change, les vecteurs qui étaient orthogonaux ne le sont donc plus nécessairement.
- Si $u \neq \overrightarrow{0}$, les vecteurs $\pm\frac{u}{\|u\|}$ sont unitaires, et ce sont les seuls de la droite $\mathbb{R}u$.
- La définition de l'orthogonalité est symétrique car $(v \mid u) = (u \mid v)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.

– Le seul vecteur u qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.
A fortiori, le seul vecteur u qui est orthogonal à tous les vecteurs de E est $u = \overrightarrow{0}$.

Définition *(Familles orthogonales ou orthonormales)*

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* si les u_i sont orthogonaux deux à deux. Si de plus ils sont unitaires, alors la famille est dite *orthonormale*.

Définition *(Bases et repères orthonormaux)*

Soit $(e) = e_1, \dots, e_n$ une base de E.
Si c'est une famille orthonormale, on dit que c'est une *base orthonormale* de E.
Un repère cartésien $(\Omega, (e))$ est dit orthonormal si la base (e) est orthonormale.

Remarques et propriétés

– La famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthonormale $\Leftrightarrow \forall\,(i,j) \in I^2,\ (u_i \mid u_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker).

– Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, c'est une famille libre.
C'est le cas en particulier d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ orthonormale.
Si $\dim E = n \geq 1$, une famille orthonormale de n vecteurs est une base orthonormale.

– La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale, pour le produit scalaire canonique.

– Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $(e) = e_1, \dots, e_n$.
Pour tous vecteurs $u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $v = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ de E, on pose $(u \mid v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
On définit ainsi un produit scalaire sur E, pour lequel la base (e) est orthonormale.

– Si la famille $(u_k)_{1\leq k\leq p}$ est orthogonale, alors $\left\|\sum_{k=1}^{p} u_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2$ *(Relation de Pythagore.)*
La réciproque n'est vraie que si $p = 2$. Ainsi $(u \mid v) = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

II.2 Produits scalaires et familles orthonormales

Proposition *(Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)*

Dans tout espace vectoriel euclidien E, il y a des bases orthonormales.
Plus précisément, soit $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de E.
Alors il existe une et une seule base orthonormale $(\varepsilon_k)_{1\leq k\leq n}$ telle que :
– $\forall\, k \in \{1,\dots,n\},\ \text{Vect}\,\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\} = \text{Vect}\,\{e_1,\dots,e_k\}$
– $\forall\, k \in \{1,\dots,n\},\ (\varepsilon_k \mid e_k) > 0$
Cette base orthonormale (ε) est obtenue de la manière suivante :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\|e_1\|}\, e_1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \{2,\dots,n\},\ \varepsilon_k = \frac{1}{\|u_k\|}\, u_k \quad \text{où} \quad u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\varepsilon_j \mid e_k)\, \varepsilon_j$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 13 pages.