Table des matières

1. Rectification d'un arc du plan 2
2. Abscisse curviligne 3
3. Formules de Frenet dans le plan 4
4. Calcul du rayon et du centre de courbure 5

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Propriétés métriques des arcs du plan

1. Rectification d'un arc du plan

Définition *(Ligne polygonale inscrite dans un arc)*

Soit $(I = [a, b], f)$ un arc paramétré continu du plan.
Soit $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ une subdivision du segment $[a, b]$.
On dit que $M(t_0), M(t_1), \ldots, M(t_n)$ forment une *ligne polygonale inscrite* dans l'arc (I, f).
La quantité $L_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$ est appelé *longueur* de cette ligne polygonale.

Définition *(Arc rectifiable)*

On dit que l'arc paramétré $(I = [a, b], f)$ est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs L_σ des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.
On appelle alors *longueur* de cet arc la quantité $L = \sup(L_\sigma)$, le "sup" étant pris sur l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans (I, f).

Proposition

Soit $(I = [a, b], f)$ un arc paramétré du plan, de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors cet arc est rectifiable et sa longueur est égale à : $L = \displaystyle\int_a^b \| f'(t) \| \, \mathrm{d}t$.

Invariance par changement de paramétrage

Soit $(I = [a, b], f)$ et $(J = [c, d], g)$ deux paramétrages admissibles du même arc de classe $\mathcal{C}^1$.
Il existe donc un difféomorphisme φ de J sur I, de classe $\mathcal{C}^1$, tel que $g = f \circ \varphi$.
Supposons par exemple que φ soit croissante (donc $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$) :
Alors $\displaystyle\int_c^d \| g'(u) \| \, \mathrm{d}u = \int_c^d \| f'(\varphi(u)) \| \, \varphi'(u) \, \mathrm{d}u = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \| f'(t) \| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \| f'(t) \| \, \mathrm{d}t$.
De la même manière, si φ est décroissante (donc $\varphi(c) = b$ et $\varphi(d) = a$) :
Alors $\displaystyle\int_c^d \| g'(u) \| \, \mathrm{d}u = -\int_c^d \| f'(\varphi(u)) \| \, \varphi'(u) \, \mathrm{d}u = -\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \| f'(t) \| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \| f'(t) \| \, \mathrm{d}t$.
Les arcs (I, f) et (J, g) ont donc la même longueur, ce qui est rassurant et montre que la longueur d'un arc paramétré est en fait une notion géométrique : on pourra donc parler de la longueur du support de l'arc, indépendamment de la représentation paramétrique utilisée.

Cas particuliers

- La longueur de l'arc $t \in [a, b] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, \mathrm{d}t$.
- On considère l'arc de classe $\mathcal{C}^1$ défini par $y = f(x)$, avec $a \leq x \leq b$.
  On a $M(x) = (x, f(x))$ donc $M'(x) = (1, f'(x))$: la longueur de l'arc est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, \mathrm{d}x$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.