



Table des matières

1.	Rectification d'un arc du plan	2
2.	Abscisse curviligne	3
3.	Formules de Frenet dans le plan	4
4.	Calcul du rayon et du centre de courbure	5

Propriétés métriques des arcs du plan

1. Rectification d'un arc du plan

Définition (*Ligne polygonale inscrite dans un arc*)

Soit $(I = [a, b], f)$ un arc paramétré continu du plan.

Soit $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ une subdivision du segment $[a, b]$.

On dit que $M(t_0), M(t_1), \dots, M(t_n)$ forment une *ligne polygonale inscrite* dans l'arc (I, f) .

La quantité $L_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \|\overrightarrow{M_k M_{k+1}}\|$ est appelé *longueur* de cette ligne polygonale.

Définition (*Arc rectifiable*)

On dit que l'arc paramétré $(I = [a, b], f)$ est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs L_σ des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.

On appelle alors *longueur* de cet arc la quantité $L = \sup(L_\sigma)$, le "sup" étant pris sur l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans (I, f) .

Proposition

Soit $(I = [a, b], f)$ un arc paramétré du plan, de classe \mathcal{C}^1 .

Alors cet arc est rectifiable et sa longueur est égale à : $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$.

Invariance par changement de paramétrage

Soit $(I = [a, b], f)$ et $(J = [c, d], g)$ deux paramétrages admissibles du même arc de classe \mathcal{C}^1 .

Il existe donc un difféomorphisme φ de J sur I , de classe \mathcal{C}^1 , tel que $g = f \circ \varphi$.

Supposons par exemple que φ soit croissante (donc $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$) :

$$\text{Alors } \int_c^d \|g'(u)\| du = \int_c^d \|f'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

De la même manière, si φ est décroissante (donc $\varphi(c) = b$ et $\varphi(d) = a$) :

$$\text{Alors } \int_c^d \|g'(u)\| du = - \int_c^d \|f'(\varphi(u))\| \varphi'(u) du = - \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Les arcs (I, f) et (J, g) ont donc la même longueur, ce qui est rassurant et montre que la longueur d'un arc paramétré est en fait une notion géométrique : on pourra donc parler de la longueur du support de l'arc, indépendamment de la représentation paramétrique utilisée.

Cas particuliers

– La longueur de l'arc $t \in [a, b] \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$.

– On considère l'arc de classe \mathcal{C}^1 défini par $y = f(x)$, avec $a \leq x \leq b$.

On a $M(x) = (x, f(x))$ donc $M'(x) = (1, f'(x))$: la longueur de l'arc est $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.