Table des matières

Propriétés métriques des arcs du plan

1. Rectification d'un arc du plan

Définition *(Ligne polygonale inscrite dans un arc)*

Soit $(I=[a,b],f)$ un arc paramétré continu du plan.
Soit $\sigma=\{t_0=a<t_1<\cdots<t_n=b\}$ une subdivision du segment $[a,b]$.
On dit que $M(t_0),M(t_1),\ldots,M(t_n)$ forment une *ligne polygonale inscrite* dans l'arc (I,f).
La quantité $L_\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\|$ est appelé *longueur* de cette ligne polygonale.

Définition *(Arc rectifiable)*

On dit que l'arc paramétré $(I=[a,b],f)$ est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs L_σ des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.
On appelle alors *longueur* de cet arc la quantité $L=\sup(L_\sigma)$, le "sup" étant pris sur l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans (I,f).

Proposition

Soit $(I=[a,b],f)$ un arc paramétré du plan, de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors cet arc est rectifiable et sa longueur est égale à : $L=\displaystyle\int_a^b\|\,f'(t)\,\|\,\mathrm{d}t$.

Invariance par changement de paramétrage

Soit $(I=[a,b],f)$ et $(J=[c,d],g)$ deux paramétrages admissibles du même arc de classe $\mathcal{C}^1$.
Il existe donc un difféomorphisme φ de J sur I, de classe $\mathcal{C}^1$, tel que $g=f\circ\varphi$.
Supposons par exemple que φ soit croissante (donc $\varphi(c)=a$ et $\varphi(d)=b$) :

Alors $\displaystyle\int_c^d\|\,g'(u)\,\|\,\mathrm{d}u=\int_c^d\|\,f'(\varphi(u))\,\|\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u=\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)}\|\,f'(t)\,\|\,\mathrm{d}t=\int_a^b\|\,f'(t)\,\|\,\mathrm{d}t$.

De la même manière, si φ est décroissante (donc $\varphi(c)=b$ et $\varphi(d)=a$) :

Alors $\displaystyle\int_c^d\|\,g'(u)\,\|\,\mathrm{d}u=-\int_c^d\|\,f'(\varphi(u))\,\|\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u=-\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)}\|\,f'(t)\,\|\,\mathrm{d}t=\int_a^b\|\,f'(t)\,\|\,\mathrm{d}t$.

Les arcs (I,f) et (J,g) ont donc la même longueur, ce qui est rassurant et montre que la longueur d'un arc paramétré est en fait une notion géométrique : on pourra donc parler de la longueur du support de l'arc, indépendamment de la représentation paramétrique utilisée.

Cas particuliers

– La longueur de l'arc $t\in[a,b]\mapsto M(t)=(x(t),y(t))$ est $L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

– On considère l'arc de classe $\mathcal{C}^1$ défini par $y=f(x)$, avec $a\le x\le b$.
On a $M(x)=(x,f(x))$ donc $M'(x)=(1,f'(x))$: la longueur de l'arc est $L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$.