



PROBABILITÉS DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

Soit n un entier naturel non nul. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n , on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : Si on note k ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k ; on effectue alors un second tirage. On appelle X_1 la variable égale au numéro de la boule tirée au premier tirage et X_2 celle égale au numéro de la boule tirée au second tirage.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X_1 , ainsi que son espérance et sa variance.
- 2) a. Déterminer la loi de probabilité de X_2 et vérifier que

$$\sum_{k=1}^n p(X_2 = k) = 1.$$

- b. Calculer $j - n + \frac{n^2}{n+j}$ où $j \in \mathbb{N}$ et montrer que l'espérance de X_2 vaut :

$$E(X_2) = \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j}.$$

- c. Déterminer un équivalent simple de $E(X_2)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.