Surfaces

Sommaire

I Plans tangents à une surface. 2
I.1 Surfaces définies par paramétrages. 2
I.2 Surface définies par équation cartésienne. 5
I.3 Tangente à l'intersection de deux surfaces en des points où les plans tangents sont distincts. 7
II Surfaces usuelles. 9
II.1 Cylindre. 9
II.2 Cône. 13
II.3 Surfaces de révolution. 17
III Quadriques. 23
III.1 Définition. 23
III.2 Plan tangent. 23
III.3 Élimination des termes rectangles. (changement de base) 24
III.4 Quadriques à centre.(changement d'origine) 25
III.5 Équation réduite d'une quadrique. 26
IV Exemples. 33
IV.1 Contours apparents coniques. 33
IV.2 Contours apparents cylindriques. 35
IV.3 Exemple de sections planes d'une surface. 36
IV.4 Exemple de courbes tracées sur une surface. 38

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

I Plans tangents à une surface.

I.1 Surfaces définies par paramétrages.

Définition

Définition

Soit σ une application classe $C^k (k \geqslant 1)$ d'un ouvert O de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$(u,v) \mapsto (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$$

L'ensemble $\sum$ des points (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels qu'il existe $(u,v) \in O$ vérifiant

$$\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases}$$

est une surface définie par paramétrages (on dit aussi nappe paramétrée), u et v sont les paramètres.

Point régulier à une surface définie par paramétrages.

Définition

Soit $\sum$ définie par paramétrages, un point M_0 de $\sum$ associé aux paramètres u_0 et v_0 est régulier si et seulement si les vecteurs $\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ forment une famille libre.

Plan tangent en un point régulier à une surface définie par paramétrages.

Définition

Soit $M_0 (u_0,v_0)$ un point régulier de $\sum$ définie par paramétrages, on appelle plan tangent à $\sum$ en M_0 le plan $\prod_{M_0}$ passant par M_0 et de direction $\text{Vect}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$.

$$P(x,y,z) \in \prod_{M_0} \text{ si et seulement si } \det\left(\overrightarrow{M_0P}, \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)\right) = 0.$$

Exemple :

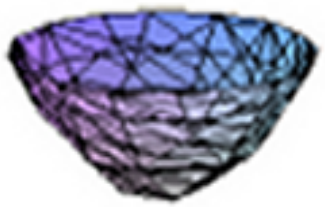
Soit la surface $\sum$ définie par $\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2+v^2} \\ y = \dfrac{v}{u^2+v^2} \\ z = \dfrac{1}{u^2+v^2} \end{cases}$ pour $(u,v) \neq (0,0)$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent $\prod_{M_0}$ à $\sum$ en point régulier M_0.

Déterminer l'ensemble des points M_0 de $\sum$ où $\prod_{M_0}$ est parallèle à le droite Δ d'équations $x = y = z$.



$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0) \text{ a pour coordonnées } \left| \begin{array}{l} \dfrac{v_0^2-u_0^2}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\ \dfrac{-2u_0v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\ \dfrac{-2u_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0) \text{ a pour coordonnées } \left| \begin{array}{l} \dfrac{-2u_0v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\ \dfrac{u_0^2-v_0^2}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \\ \dfrac{-2v_0}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{1}{\left(u_0^2+v_0^2\right)^4} \left| \begin{array}{l} 2u_0\left(v_0^2+u_0^2\right) \\ 2v_0\left(v_0^2+u_0^2\right) \\ -\left(u_0^2+v_0^2\right)^2 \end{array} \right.$$

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.