II Surfaces usuelles.

II.1 Cylindre.

Définition.

Définition Cylindre

Un cylindre est une réunion de droites parallèles, une de ces droites s'appelle une génératrice du cylindre.
On appelle direction du cylindre la direction commune de toutes ces droites.

Définition Section droite

On appelle section droite l'intersection du cylindre avec un plan orthogonal à la direction du cylindre.

Equations paramétriques d'un cylindre.

Définition

Soit la courbe Γ de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ définie par $A \in \Gamma$ si et seulement $\overrightarrow{OA} = F(t)$ où F est une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$.
On dit que Γ est une directrice du cylindre $\sum$ de direction le sous-espace vectoriel engendré par un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, si et seulement si toute génératrice du cylindre $\sum$ rencontre Γ.

$M(x,y,z) \in \sum$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \Gamma$, $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{OM} = F(t) + \lambda \overrightarrow{u}$.

Plan tangent à un cylindre

–

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}(t_0,\lambda_0) = F'(t_0)$$

et

$$\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \lambda}(t_0,\lambda_0) = \overrightarrow{u}$$

Le point $M_0(t_0,\lambda_0)$ est régulier si et seulement si les vecteurs $F'(t_0)$ et $\overrightarrow{u}$ forment une famille libre, le plan tangent en un point régulier M_0 est de direction $Vect\left(F'(t_0), \overrightarrow{u}\right)$, il est constant le long d'une génératrice du cylindre.

– Exemple : $\sum$ cylindre de directrice $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ z = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$ et de direction engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On cherche le plan tangent au point $M_0 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\dfrac{7}{3} \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} t = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

```
> with(plots):

> x:=(u,v)->u^2+v;
```

$$x := (u, v) \to u^2 + v$$

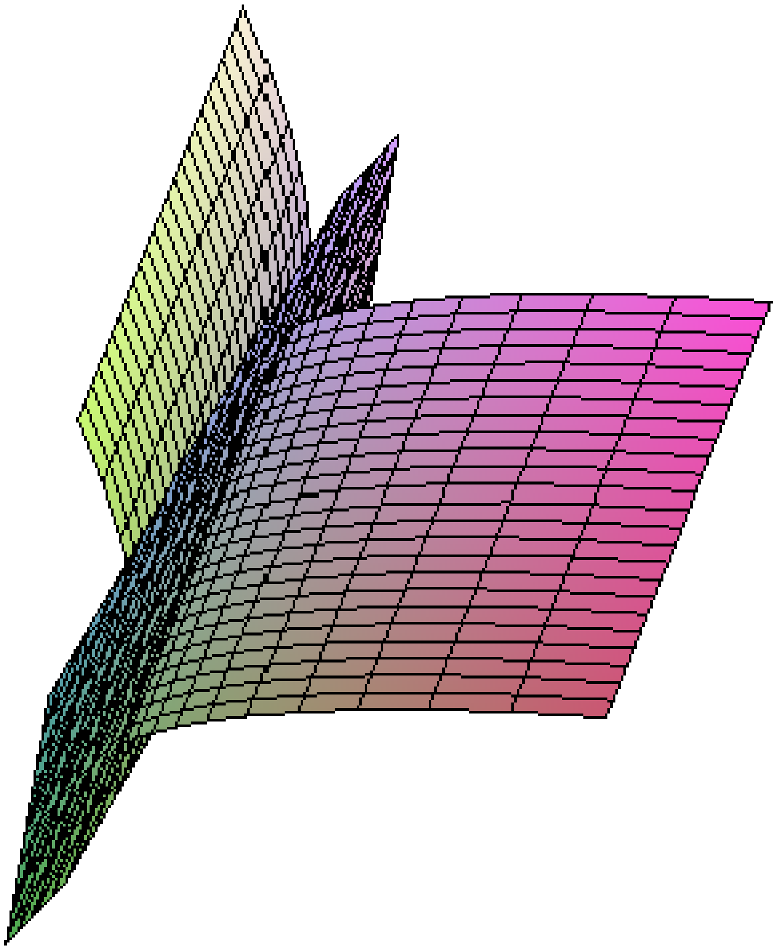
```
> y:=(u,v)-> u^3-2*v;
```

$$y := (u, v) \to u^3 - 2\,v$$

```
> z:=(u,v)->1/(u^2+1)+3*v;
```

$$z := (u, v) \to \frac{1}{u^2 + 1} + 3\,v$$

```
> A:=plot3d([x(u,v),y(u,v),z(u,v)],u=-10..10,v=-30..30):
> B:=implicitplot3d(8*(x-2)-13/2*(y+1)-7*(z-7/3)=0,x=-80..80,y=-100..10
> 0,z=-150..150):
> display3d(A,B);
```



Equation cartésienne d'un cylindre.

Propriétés

– Cas particulier important.
Soit $\left(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ un repère de E (euclidien de dimension 3), soit Γ la courbe d'équation $\begin{cases} z=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$
f de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ sur un ouvert O de $\mathbb{R}^2$, le cylindre $\sum$ de direction engendrée par $\overrightarrow{k}$ et de directrice Γ est la surface d'équation $f(x,y)=0$ dans $\mathbb{R}^3$.
Exemple : $x^3+y^{2004}=\pi$ est un cylindre d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{k}$.

– Soit deux équations de plans vectoriels $\begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$, P et Q sont deux formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^3$.
$P(x,y,z)=ax+by+cz$ et $Q(x,y,z)=a'x+b'y+c'z$, les vecteurs (a,b,c) et (a',b',c') forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ d'un ouvert O de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $f(P(x,y,z),Q(x,y,z))=0$
est un cylindre d'axe l'intersection des deux plans P et Q .

◇ Supposons les vecteurs (a,b,c) et (a',b',c') orthogonaux , on choisit $\overrightarrow{I}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J}\dfrac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{K}=\overrightarrow{I}\wedge\overrightarrow{J}$. On note (X,Y,Z) les coordonnées de M dans le repère $\left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$, on a $ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{I}$, donc
$ax+by+cz=X\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, de même $a'x+b'y+c'z=Y\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}$
$f(P,Q)=f\left(X\sqrt{a^2+b^2+c^2},Y\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\right)=g(X,Y)$, d'après le cas particulier , $\sum$ est un cylindre d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{K}$, or $\overrightarrow{K}$ est un vecteur directeur de $P\cap Q$.

◇ Si les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ forment une famille libre, d'après le procédé de Schmidt dans les espaces euclidiens, on sait qu'il existe $\overrightarrow{I}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u'}$, $(\beta\neq 0)$ tels que la famille $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$ soit orthonormée, on pose $\overrightarrow{K}=\overrightarrow{I}\wedge\overrightarrow{J}$.
On a $ax+by+cz=X\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ soit $P(x,y,z)=\|\overrightarrow{u}\|X$
$Y=\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{J}=\overrightarrow{OM}.\left(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u'}\right)=\alpha P(x,y,z)+\beta Q(x,y,z)$, donc $Q(x,y,z)=\dfrac{1}{\beta}(Y-\alpha\|\overrightarrow{u}\|X)$
$f(P,Q)=f\left(\|\overrightarrow{u}\|X,\dfrac{1}{\beta}(Y-\alpha\|\overrightarrow{u}\|X)\right)=g(X,Y)$, d'après le cas particulier , $\sum$ est un cylindre d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{K}$, or $\overrightarrow{K}$ est un vecteur directeur de $P\cap Q$.

II.2 Cône.

Définition.

Définition

On appelle cône de sommet Ω une réunion de droites passant par Ω.

Equations paramétriques d'un cône.

Soit la courbe Γ de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ définie par $A \in \Gamma$ si et seulement $\overrightarrow{OA} = F(t)$ où F est une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$.

On dit que Γ est une directrice du cône $\sum$ de sommet Ω, si et seulement si pour tout point $M \neq \Omega$ du cône $\sum$, la droite (ΩM) rencontre la directrice Γ.

$M(x,y,z) \in \sum$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in \Gamma$, $\overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$, donc $\overrightarrow{OM} = \lambda F(t) + (1-\lambda)\overrightarrow{O\Omega}$.

$\overrightarrow{OM} = \lambda\left(F(t) - \overrightarrow{O\Omega}\right) + \overrightarrow{O\Omega}$, on pose $G(t) = F(t) - \overrightarrow{O\Omega}$ et on obtient alors $\overrightarrow{OM} = \lambda G(t) + \overrightarrow{O\Omega}$.

Plan tangent à un cône .

- $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}(t_0,\lambda_0) = \lambda_0 G'(t_0)$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \lambda}(t_0,\lambda_0) = G(t_0)$.
  Le point $M_0(t_0,\lambda_0)$ est régulier si et seulement si les vecteurs $\lambda_0 \neq 0$ et $G'(t_0)$ et $G(t_0)$ forment une famille libre, le plan tangent en un point régulier $M_0,\lambda_0 \neq 0$, est de direction $Vect(G(t_0), G'(t_0))$, le plan tangent est invariant sur la droite $(M_0\Omega)$.
- Exemple : $\sum$ cône de directrice $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ z = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$ et de sommet $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
  On obtient si $M(x,y,z) \in \sum$ alors

$$\begin{cases} x = \lambda(t^2-1)+1 \\ y = \lambda(t^3+2)-2 \\ z = \lambda\left(\dfrac{1}{1+t^2} - 3\right) + 3 \end{cases}$$

On cherche le plan tangent au point $M_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} t = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

$$G(t) \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t^3+2 \\ \dfrac{1}{1+t^2} - 3 \end{pmatrix} \quad G'(t) \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$