III Quadriques.

III.1 Définition.

Définition1.

Définition Quadrique

Soit P l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de la forme ;

$$P(x,y,z) = ax^2 + by^2 + +cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy + 2gx + 2hy + 2kz + l$$

On appelle quadrique, la surface de $\mathbb{R}^3$ dont une équation cartésienne est de la forme $P(x,y,z) = 0$.

Remarque.

On pose $Q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + +cz^2 + 2dxy + 2ezx + 2fxy$, Q est un polynôme homogène du second degré , c'est à dire que Q est une fonction polynomiale du second degré en x,y et z , de plus il est homogène de degré 2 car :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ Q(tx,ty,tz) = t^2 Q(x,y,z)$$

.

On pose $F(x,y,z) = 2gx + 2hy + 2kz$, F est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, la matrice L de F dans la base canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ est $L = \begin{pmatrix} g \\ h \\ k \end{pmatrix}$

si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $F(x,y,z) = 2{}^tLX$

On note $M = \begin{pmatrix} a & f & e \\ d & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$, on a ${}^tXMX = Q(x,y,z)$.

Donc la quadrique a pour équation

$${}^tXMX + 2{}^tLX + l = 0$$

III.2 Plan tangent.

Le vecteur $\overrightarrow{gradP}(x_0,y_0,z_0)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

donc

$$\overrightarrow{gradP}\,(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} 2ax_0+2fy_0+2ez_0+2g \\ 2fx_0+2by_0+2dz_0+2h \\ 2ex_0+2dy_0+2cz_0+2k \end{pmatrix}$$

On note toujours $M=\begin{pmatrix} a & f & e \\ d & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{gradP}\,(x_0,y_0,z_0)$ a pour coordonnées $2MX_0+2L$

avec $X_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

M_0 est régulier si $MX_0+L\neq 0$.

Le plan tangent en un point régulier est :

$$(x-x_0)\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial P}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0$$

Sous forme matricielle, ${}^t(2MX_0+2L)(X-X_0)=0$, c'est à dire $2{}^tX_0MX-2{}^tX_0MX_0+{}^t2LX-{}^t2LX_0=0$

Or ${}^tX_0MX_0+2{}^tLX_0+l=0$, on en déduit que le plan tangent a pour équation en un point régulier,

$${}^tX_0MX+{}^tL(X+X_0)+l=0$$

D'où la "règle " de dédoublement des termes, on remplace les carrés comme x^2 par xx_0, $xz+xz$ est remplacé par xz_0+x_0z et la somme $x+x$ par $x+x_0$.

Exemple : $\sum$: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}+4xz+4x+8y+10z=0$

Le plan tangent en M_0 régulier a pour équation ;

$$\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{9}+\frac{zz_0}{16}+2(xz_0+x_0z)+2(x+x_0)+4(y+y_0)+5(z+z_0)=0.$$

III.3 Élimination des termes rectangles. (changement de base)

Parmi les termes du second degré, on cherche à conserver uniquement les carrés, pour pouvoir caractériser les quadriques par leurs équations réduites.

La méthode consiste à changer de repère orthonormé, une méthode parmi d'autres (toujours regarder avant, si l' évidence n'est pas devant nous) consiste à diagonaliser la matrice symétrique réelle M.

On sait qu'il existe une matrice U orthogonale et une matrice $D=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ telles que $U^{-1}MU=D$ soit

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

$M = UDU^{-1}$ou encore $M = UD\,{}^tU$.

On a ${}^tXMX = {}^t\,XUD\,{}^tUX = {}^t\,({}^tUX)\,D\,({}^tUX)$, on pose $Y = {}^t\,UX = U^{-1}X$.

On sait que si $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice M, la matrice Y des coordonnées d'un vecteur dans la base $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ est égale à $U^{-1}X$ où X est la matrice des coordonnées de ce vecteur dans la base canonique $\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ et U est la matrice de passage de la base $\left(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ à la base $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$. Les nouveaux axes du repère $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ sont appelés axes principaux de la quadrique.

On note $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

$$Q\,(x,y,z) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$$

L'équation de la quadrique dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = \left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ est ${}^tYDY + {}^t\,LUY + l = 0$

Soit ${}^tYDY + {}^t\,L'Y + l = 0$ avec $L' = {}^t\,UL$.

III.4 Quadriques à centre.(changement d'origine)

On change l'origine du repère, on note $\mathcal{R} = \left(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ et $\mathcal{R}' = \left(O',\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$, X la matrice des coordonnées dans $\mathcal{R}$, X' la matrice es coordonnées dans $\mathcal{R}'$, $X_{O'}$ la matrice des coordonnées dans $\mathcal{R}$ de O' dans le repère $\mathcal{R}$.

On a $X' = X - X_{O'}$ ou encore $X = X' + X_{O'}$.

On remplace dans l'équation de la quadrique; ${}^t\,(X' + X_{O'})\,M\,(X' + X_{O'}) + 2{}^tL\,(X' + X_{O'}) + l = 0$.

On développe et on obtient :

$${}^tX'MX' + 2\left({}^tX_{O'}M + {}^t\,L\right)X' + \left({}^tX_{0'}MX_{0'} + 2{}^tLX_{O'} + l\right) = 0$$

On remarque que $P\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = ({}^tX_{0'}MX_{0'.} + 2{}^tLX_{O'} + l)$.
On pose $L' = MX_{O'} + L$ on a :

$${}^tX'MX' + 2{}^tL'X' + P\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = 0$$

Définition Centre

On dit que O' est un centre pour la quadrique $\sum$ si $L' = 0$, l'équation dans $\mathcal{R}'$ est ${}^tX'MX' + P\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

Détermination du centre

– Existence.
Si M est inversible alors il existe un centre .
Preuve : $L' = 0$ si et seulement si $MX_{O'} + L = 0$, donc $MX_{O'} = -L$, ceci équivaut à $X_{O'} = -M^{-1}L$.

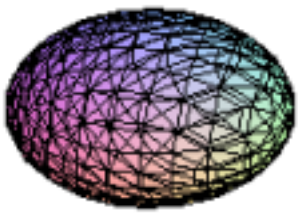
– Détermination.
On a vu que le vecteur $\overrightarrow{gradP}\,(x_0,y_0,z_0)$ a pour coordonnées $2MX_0 + 2L$, donc $L' = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{gradP}\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = \overrightarrow{0}$
Les coordonnées $(x_{O'},y_{O'},z_{O'})$ du centre O' sont solutions de $\overrightarrow{gradP}\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'}) = \overrightarrow{0}$.

III.5 Équation réduite d'une quadrique.

Classification

– Rang de M égal à 3.
La quadrique $\sum$ est une quadrique à centre O', dans le repère $\mathcal{R}' = \left(O',\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ où $\left(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ sont les directions principales de la conique, $\sum$ admet pour équation : $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + l' = 0$ avec $l' = P\,(x_{O'},y_{O'},z_{O'})$. On remarque que si deux valeurs propres sont égales alors la quadrique est de révolution.
◇ Supposons $l' \neq 0$.
On obtient quatre type de quadriques suivant le signe des valeurs propres de M.

type I)
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$
Ellipsoïde.



type II)
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = -1$$
Vide.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.