

IV Exemples.

IV.1 Contours apparents coniques.

Définition

Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 et Ω un point fixe de \mathbb{R}^3 , on appelle contour apparent conique de la surface Σ vue du point Ω , l'ensemble Γ des points M de Σ tels que le plan tangent en M à Σ passe par Ω .

Définition

Le cône de sommet Ω et de directrice Γ est appelé cône circonscrit à la surface Σ .

Exemple.

Soit l'hyperboloïde Σ d'équation : $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$ et $\Omega(1, 1, -1)$.

L'équation du plan tangent M_0 en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ régulier est $xx_0 - 2yy_0 + 2zz_0 = 1$, $\Omega \in M_0$ si $x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 1$.

Les coordonnées des points M_0 vérifient le système suivant $\begin{cases} x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 1. \\ x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \end{cases}$

L'intersection du quadrique et d'un plan est en général une conique.

On choisit $\vec{K} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ on choisit $\vec{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{T}$, d'où $\vec{J} \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

On note (X_0, Y_0, Z_0) les coordonnées de M_0 dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{T}, \vec{J}, \vec{K})$.

$x_0 - 2y_0 + 2z_0 = \sqrt{5} \overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{K} = Z_0 \sqrt{5}$ donc $Z_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ on sait que $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix},$

On remplace Z_0 par $\frac{1}{\sqrt{5}}$, en déduit que :

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{4}{\sqrt{10}}Y_0 + \frac{1}{5} \\ y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{2}} - \frac{Y_0}{\sqrt{10}} - \frac{2}{5} \\ z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_0 + \frac{1}{\sqrt{10}}Y_0 + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{4}{\sqrt{10}}b + \frac{1}{5} \\ y_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{10}} - \frac{2}{5} \\ z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{10}}b + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0^2 = \frac{8}{5}Y_0^2 - \frac{4}{25}\sqrt{10}Y_0 + \frac{1}{25} + \frac{2}{5}\sqrt{2}X_0\sqrt{10}Y_0 + \frac{8}{5}\sqrt{2}X_0$$

On obtient la conique d'équation ; $\frac{8}{5}Y_0^2 - \frac{4}{25}\sqrt{10}Y_0 + \frac{1}{25} + \frac{4}{5}X_0Y_0\sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{2}X_0 = 1$

$$\text{or } \frac{8}{5}Y_0^2 + \frac{4}{5}X_0Y_0\sqrt{5} = \frac{4}{5}(2Y_0^2 + Y_0\sqrt{5}) = \frac{4}{5}(X_0, Y_0) \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } U = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

U admet la valeur propre $\frac{5}{2}$ associée au vecteur $\vec{I}_1 \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ et la valeur propre $-\frac{1}{2}$ associée au vecteur propre $\vec{J}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

La matrice U est inversible donc la conique est à centre O' dont les coordonnées (a, b) sont solutions de $\overrightarrow{\text{grad}P}(a, b) = \vec{0}$, soit

$$\begin{cases} \frac{4}{5}b\sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{2} = 0 \\ \frac{16}{5}b - \frac{4}{25}\sqrt{10} + \frac{4}{5}a\sqrt{5} = 0 \end{cases}, \text{ les solutions sont } a = \frac{9\sqrt{2}}{5} \text{ et } b = -\frac{2}{5}\sqrt{10}.$$

Le centre de la conique est donc le point $O' \left(\frac{9\sqrt{2}}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{10} \right)$.

$$P(a, b) = \frac{8}{5} \left(-\frac{2}{5}\sqrt{10} \right)^2 - \frac{4}{25}\sqrt{10} \left(-\frac{2}{5}\sqrt{10} \right) + \frac{1}{25} + \frac{4}{5} \left(\frac{9\sqrt{2}}{5} \right) \left(-\frac{2}{5}\sqrt{10} \right) \sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{2} \left(\frac{9\sqrt{2}}{5} \right) - 1 = \frac{56}{25}$$

Dans le repère $(O', \vec{I}_1, \vec{J}_1)$ la conique a pour équation réduite $\frac{5}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}Y_1^2 = \frac{56}{25}$, c'est donc une hyperbole dont on peut déterminer les éléments caractéristiques.

IV.2 Contours apparents cylindriques.

Définition

Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 et D une direction de \mathbb{R}^3 , on appelle contour apparent cylindrique de la surface Σ de direction D , l'ensemble Γ des points M de Σ tels qu'il existe une droite passant par M et de direction D contenue dans le plan tangent en M à Σ .

Définition

Le cylindre de direction et de directrice Γ est appelé cône circonscrit à la surface Σ .

Exemple.

Déterminer l'équation du cylindre \mathcal{C} de direction $\text{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u}(1, -2, 1)$ et circonscrit à la surface $\Sigma : x^2 + 2y^2 - z = 0$.

On écrit que si $M(x, y, z) \in \mathcal{C}$ si la droite (M, \vec{u}) est orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}P(x, y, z)}$ où $P(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$.

$\overrightarrow{\text{grad}P(x, y, z)}(2x, 4y, -1)$, donc $\overrightarrow{\text{grad}P(x, y, z)} \cdot \vec{u} = 0$, ce qui donne : $2x - 8y - 1 = 0$.

Le contour apparent de direction $\mathbb{R}\vec{u}$ est la conique $\Gamma \begin{cases} 2x - 8y - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z = 0. \end{cases}$

Pour trouver le cylindre circonscrit on peut chercher l'équation du cylindre et d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$ avec les méthodes habituelles.

La surface Σ est une quadrique, donc toute droite coupe Σ en au plus deux points, la droite (M, \vec{u}) étant incluse dans le plan tangent en M à Σ , on peut montrer que cette droite coupe Σ en un point unique.

$N(X, Y, Z) \in (M, \vec{u})$ si $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} X = x + t \\ Y = y - 2t \\ Z = z + t \end{cases}$

Les coordonnées de $\Sigma \cap (M, \vec{u})$ vérifient le système $\begin{cases} X = x + t \\ Y = y - 2t \\ Z = z + t \\ (x + t)^2 + 2(y - 2t)^2 - (z + t) = 0 \end{cases}$

t est solution de ; $9t^2 + t(2x - 8y - 1) + 2y^2 + x^2 - z = 0$.

$\Delta = (2x - 8y - 1)^2 - 36(2y^2 + x^2 - z)$, or t doit être racine double, donc l'équation du cylindre circonscrit \mathcal{E} cherché est :

$$(1) \quad (2x - 8y - 1)^2 - 36(2y^2 + x^2 - z) = 0$$

Vérifions que \mathcal{E} est bien un cylindre d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$.

(1) donne : $-32x^2 - 32xy - 4x - 8y^2 + 16y + 1 + 36z + 0$

La matrice $M = \begin{pmatrix} -32 & -16 & 0 \\ -16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vecteurs propres : $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -40, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$, les valeurs propres sont : $0, 0, -40$