

## IV Exemples.

### IV.1 Contours apparents coniques.

#### Définition

Soit  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $\Omega$  un point fixe de  $\mathbb{R}^3$ , on appelle contour apparent conique de la surface  $\Sigma$  vue du point  $\Omega$ , l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  de  $\Sigma$  tels que le plan tangent en  $M$  à  $\Sigma$  passe par  $\Omega$ .

#### Définition

Le cône de sommet  $\Omega$  et de directrice  $\Gamma$  est appelé cône circonscrit à la surface  $\Sigma$ .

Exemple.

Soit l'hyperboloïde  $\Sigma$  d'équation :  $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$  et  $\Omega(1, 1, -1)$ .

L'équation du plan tangent  $M_0$  en  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  régulier est  $xx_0 - 2yy_0 + 2zz_0 = 1$ ,  $\Omega \in M_0$  si  $x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 1$ .

Les coordonnées des points  $M_0$  vérifient le système suivant  $\begin{cases} x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 1. \\ x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \end{cases}$

L'intersection du quadrique et d'un plan est en général une conique.

On choisit  $\vec{K} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$  on choisit  $\vec{T} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$  et  $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{T}$ , d'où  $\vec{J} \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

On note  $(X_0, Y_0, Z_0)$  les coordonnées de  $M_0$  dans le repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{T}, \vec{J}, \vec{K})$ .

$x_0 - 2y_0 + 2z_0 = \sqrt{5} \overrightarrow{OM_0} \cdot \vec{K} = Z_0 \sqrt{5}$  donc  $Z_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$  on sait que  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix},$

On remplace  $Z_0$  par  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ , en déduit que :

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{4}{\sqrt{10}}Y_0 + \frac{1}{5} \\ y_0 = \frac{X_0}{\sqrt{2}} - \frac{Y_0}{\sqrt{10}} - \frac{2}{5} \\ z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}X_0 + \frac{1}{\sqrt{10}}Y_0 + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{4}{\sqrt{10}}b + \frac{1}{5} \\ y_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{10}} - \frac{2}{5} \\ z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{10}}b + \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0^2 = \frac{8}{5}Y_0^2 - \frac{4}{25}\sqrt{10}Y_0 + \frac{1}{25} + \frac{2}{5}\sqrt{2}X_0\sqrt{10}Y_0 + \frac{8}{5}\sqrt{2}X_0$$

On obtient la conique d'équation ;  $\frac{8}{5}Y_0^2 - \frac{4}{25}\sqrt{10}Y_0 + \frac{1}{25} + \frac{4}{5}X_0Y_0\sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{2}X_0 = 1$

$$\text{or } \frac{8}{5}Y_0^2 + \frac{4}{5}X_0Y_0\sqrt{5} = \frac{4}{5}(2Y_0^2 + Y_0\sqrt{5}) = \frac{4}{5}(X_0, Y_0) \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } U = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$U$  admet la valeur propre  $\frac{5}{2}$  associée au vecteur  $\vec{I}_1 \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$  et la valeur propre  $-\frac{1}{2}$  associée au vecteur propre  $\vec{J}_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ .

La matrice  $U$  est inversible donc la conique est à centre  $O'$  dont les coordonnées  $(a, b)$  sont solutions de  $\overrightarrow{\text{grad}P}(a, b) = \vec{0}$ , soit

$$\begin{cases} \frac{4}{5}b\sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{2} = 0 \\ \frac{16}{5}b - \frac{4}{25}\sqrt{10} + \frac{4}{5}a\sqrt{5} = 0 \end{cases}, \text{ les solutions sont } a = \frac{9\sqrt{2}}{5} \text{ et } b = -\frac{2}{5}\sqrt{10}.$$

Le centre de la conique est donc le point  $O' \left( \frac{9\sqrt{2}}{5}, -\frac{2}{5}\sqrt{10} \right)$ .

$$P(a, b) = \frac{8}{5} \left( -\frac{2}{5}\sqrt{10} \right)^2 - \frac{4}{25}\sqrt{10} \left( -\frac{2}{5}\sqrt{10} \right) + \frac{1}{25} + \frac{4}{5} \left( \frac{9\sqrt{2}}{5} \right) \left( -\frac{2}{5}\sqrt{10} \right) \sqrt{5} + \frac{8}{5}\sqrt{2} \left( \frac{9\sqrt{2}}{5} \right) - 1 = \frac{56}{25}$$

Dans le repère  $(O', \vec{I}_1, \vec{J}_1)$  la conique a pour équation réduite  $\frac{5}{2}X_1^2 - \frac{1}{2}Y_1^2 = \frac{56}{25}$ , c'est donc une hyperbole dont on peut déterminer les éléments caractéristiques.

## IV.2 Contours apparents cylindriques.

### Définition

Soit  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $D$  une direction de  $\mathbb{R}^3$ , on appelle contour apparent cylindrique de la surface  $\Sigma$  de direction  $D$ , l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  de  $\Sigma$  tels qu'il existe une droite passant par  $M$  et de direction  $D$  contenue dans le plan tangent en  $M$  à  $\Sigma$ .

### Définition

Le cylindre de direction et de directrice  $\Gamma$  est appelé cône circonscrit à la surface  $\Sigma$ .

Exemple.

Déterminer l'équation du cylindre  $\mathcal{C}$  de direction  $\text{Vect}(\vec{u})$  où  $\vec{u}(1, -2, 1)$  et circonscrit à la surface  $\Sigma : x^2 + 2y^2 - z = 0$ .

On écrit que si  $M(x, y, z) \in \mathcal{C}$  si la droite  $(M, \vec{u})$  est orthogonal à  $\overrightarrow{\text{grad}P(x, y, z)}$  où  $P(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$ .

$\overrightarrow{\text{grad}P(x, y, z)}(2x, 4y, -1)$ , donc  $\overrightarrow{\text{grad}P(x, y, z)} \cdot \vec{u} = 0$ , ce qui donne :  $2x - 8y - 1 = 0$ .

Le contour apparent de direction  $\mathbb{R}\vec{u}$  est la conique  $\Gamma \begin{cases} 2x - 8y - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z = 0. \end{cases}$

Pour trouver le cylindre circonscrit on peut chercher l'équation du cylindre et d'axe  $\mathbb{R}\vec{u}$  avec les méthodes habituelles.

La surface  $\Sigma$  est une quadrique, donc toute droite coupe  $\Sigma$  en au plus deux points, la droite  $(M, \vec{u})$  étant incluse dans le plan tangent en  $M$  à  $\Sigma$ , on peut montrer que cette droite coupe  $\Sigma$  en un point unique.

$N(X, Y, Z) \in (M, \vec{u})$  si  $\exists t \in \mathbb{R}$  tel que :  $\begin{cases} X = x + t \\ Y = y - 2t \\ Z = z + t \end{cases}$

Les coordonnées de  $\Sigma \cap (M, \vec{u})$  vérifient le système  $\begin{cases} X = x + t \\ Y = y - 2t \\ Z = z + t \\ (x + t)^2 + 2(y - 2t)^2 - (z + t) = 0 \end{cases}$

$t$  est solution de ;  $9t^2 + t(2x - 8y - 1) + 2y^2 + x^2 - z = 0$ .

$\Delta = (2x - 8y - 1)^2 - 36(2y^2 + x^2 - z)$ , or  $t$  doit être racine double, donc l'équation du cylindre circonscrit  $\mathcal{E}$  cherché est :

$$(1) \quad (2x - 8y - 1)^2 - 36(2y^2 + x^2 - z) = 0$$

Vérifions que  $\mathcal{E}$  est bien un cylindre d'axe  $\mathbb{R}\vec{u}$ .

(1) donne :  $-32x^2 - 32xy - 4x - 8y^2 + 16y + 1 + 36z + 0$

La matrice  $M = \begin{pmatrix} -32 & -16 & 0 \\ -16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , vecteurs propres :  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow -40, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$ , les valeurs propres sont :  $0, 0, -40$