IV Exemples.

IV.1 Contours apparents coniques.

Définition

Soit $\sum$ une surface de $\mathbb{R}^3$ et Ω un point fixe de $\mathbb{R}^3$, on appelle contour apparent conique de la surface $\sum$ vue du point Ω, l'ensemble Γ des points M de $\sum$ tels que le plan tangent en M à $\sum$ passe par Ω.

Définition

Le cône de sommet Ω et de directrice Γ est appelé cône circonscrit à la surface $\sum$.

Exemple.

Soit l'hyberboloide $\sum$ d'équation : $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$ et $\Omega\,(1,1,-1)$.

L'équation du plan tangent $_{M_0}$ en $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ régulier est $xx_0 - 2yy_0 + 2zz_0 = 1$, $\Omega \in_{M_0}$ si $x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 1$.

Les coordonnées des points M_0 vérifient le système suivant $\begin{cases} x_0 - 2y_0 + 2z_0 = 1. \\ x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \end{cases}$

L'intersection du quadrique et d'un plan est en général une conique.

On choisit $\overrightarrow{K}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ on choisit $\overrightarrow{I}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I}$, d'où $\overrightarrow{J}\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

On note (X_0,Y_0,Z_0) les coordonnées de M_0 dans le repère $\mathcal{R} = \left(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$.

$x_0 - 2y_0 + 2z_0 = \sqrt{5}\overrightarrow{OM_0}.\overrightarrow{K} = Z_0\sqrt{5}$ donc $Z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ on sait que } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix},$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

On remplace Z_0 par $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, en déduit que :

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{4}{\sqrt{10}}Y_0 + \dfrac{1}{5} \\ y_0 = \dfrac{X_0}{\sqrt{2}} - \dfrac{Y_0}{\sqrt{10}} - \dfrac{2}{5} \\ z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X_0 + \dfrac{1}{\sqrt{10}}Y_0 + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{4}{\sqrt{10}}b + \dfrac{1}{5} \\ y_0 = \dfrac{a}{\sqrt{2}} - \dfrac{c}{\sqrt{10}} - \dfrac{2}{5} \\ z_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}a + \dfrac{1}{\sqrt{10}}b + \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$x_0^2 - 2y_0^2 + 2z_0^2 = \dfrac{8}{5}Y_0^2 - \dfrac{4}{25}\sqrt{10}Y_0 + \dfrac{1}{25} + \dfrac{2}{5}\sqrt{2}X_0\sqrt{10}Y_0 + \dfrac{8}{5}\sqrt{2}X_0$

On obtient la conique d'équation ; $\dfrac{8}{5}Y_0^2 - \dfrac{4}{25}\sqrt{10}Y_0 + \dfrac{1}{25} + \dfrac{4}{5}X_0Y_0\sqrt{5} + \dfrac{8}{5}\sqrt{2}X_0 = 1$

or $\dfrac{8}{5}Y_0^2 + \dfrac{4}{5}X_0Y_0\sqrt{5} = \dfrac{4}{5}\left(2Y_0^2 + Y_0\sqrt{5}\right) = \dfrac{4}{5}\left(X_0,Y_0\right)\begin{pmatrix} 2 & \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$

On pose $U = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

U admet la valeur propre $\frac{5}{2}$ associée au vecteur $\overrightarrow{I_1}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ et la valeur propre $-\frac{1}{2}$ associée au vecteur propre $\overrightarrow{J_1}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

La matrice U est inversible donc la conique est à centre O' dont les coordonnées (a,b) sont solutions de $\overrightarrow{gradP\left(a,b\right)} = \overrightarrow{0}$, soit

$\begin{cases} \dfrac{4}{5}b\sqrt{5} + \dfrac{8}{5}\sqrt{2} = 0 \\ \dfrac{16}{5}b - \dfrac{4}{25}\sqrt{10} + \dfrac{4}{5}a\sqrt{5} = 0 \end{cases}$, les solutions sont $a = \dfrac{9\sqrt{2}}{5}$ et $b = -\frac{2}{5}\sqrt{10}$.

Le centre de la conique est donc le point $O'\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{5}, -\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)$.

$P\left(a,b\right) = \dfrac{8}{5}\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 - \dfrac{4}{25}\sqrt{10}\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right) + \dfrac{1}{25} + \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{5}\right)\left(-\dfrac{2}{5}\sqrt{10}\right)\sqrt{5} + \dfrac{8}{5}\sqrt{2}\left(\dfrac{9\sqrt{2}}{5}\right) - 1 = \dfrac{56}{25}$

Dans le repère $\left(O',\overrightarrow{I_1},\overrightarrow{J_1}\right)$ la conique a pour équation réduite $\dfrac{5}{2}X_1^2 - \dfrac{1}{2}Y_1^2 = \dfrac{56}{25}$, c'est donc une hyperbole dont on peut déterminer les éléments caractéristiques.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.

IV.2 Contours apparents cylindriques.

Définition

Soit $\sum$ une surface de $\mathbb{R}^3$ et D une direction de $\mathbb{R}^3$, on appelle contour apparent cylindrique de la surface $\sum$ de direction D, l'ensemble Γ des points M de $\sum$ tels qu'il existe une droite passant par M et de direction D contenue dans le plan tangent en M à $\sum$.

Définition

Le cylindre de direction et de directrice Γ est appelé cône circonscrit à la surface $\sum$.

Exemple.

Déterminer l'équation du cylindre $\mathcal{C}$ de direction $Vect\left(\overrightarrow{u}\right)$ où $\overrightarrow{u}\,(1,-2,1)$ et circonscrit à la surface $\sum : x^2 + 2y^2 - z = 0$.

On écrit que si $M\,(x,y,z) \in \mathcal{C}$ si la droite $(M,\overrightarrow{u})$ est orthogonal à $\overrightarrow{gradP\,(x,y,z)}$ où $P\,(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z$.

$\overrightarrow{gradP\,(x,y,z)}\,(2x,4y,-1)$, donc $\overrightarrow{gradP\,(x,y,z)}.\overrightarrow{u} = 0$, ce qui donne : $2x - 8y - 1 = 0$.

Le contour apparent de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ est la conique $\Gamma \begin{cases} 2x - 8y - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - z = 0. \end{cases}$

Pour trouver le cylindre circonscrit on peut chercher l'équation du cylindre et d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$ avec les méthodes habituelles.

La surface $\sum$ est une quadrique,donc toute droite coupe $\sum$ en au plus deux points, la droite $(M,\overrightarrow{u})$ étant incluse dans le plan tangent en M à $\sum$, on peut montrer que cette droite coupe $\sum$ en un point unique.

$N\,(X,Y,Z) \in (M,\overrightarrow{u})$ si $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} X = x + t \\ Y = y - 2t \\ Z = z + t \end{cases}$

Les coordonnées de $\sum \cap (M,\overrightarrow{u})$ vérifient le système $\begin{cases} X = x + t \\ Y = y - 2t \\ Z = z + t \\ (x+t)^2 + 2\,(y-2t)^2 - (z+t) = 0 \end{cases}$

t est solution de ; $9t^2 + t\,(2x - 8y - 1) + 2y^2 + x^2 - z = 0$.

$\Delta = (2x - 8y - 1)^2 - 36\,(2y^2 + x^2 - z)$, or t doit être racine double, donc l'équation du cylindre circonscrit $\mathcal{E}$ cherché est :

$$(1) \qquad (2x - 8y - 1)^2 - 36\left(2y^2 + x^2 - z\right) = 0$$

Vérifions que $\mathcal{E}$ est bien un cylindre d'axe $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

(1) donne : $-32x^2 - 32xy - 4x - 8y^2 + 16y + 1 + 36z + 0$

La matrice $M = \begin{pmatrix} -32 & -16 & 0 \\ -16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vecteurs propres: $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -40, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0$, les valeurs propres sont : $0,0,-40$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 8 pages.