PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–10

1) Soit a et b deux réels strictement positifs. Montrer que : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

2)Soit $p_1,\ldots,p_n$ des réels positifs ou nuls. Montrer que :

$$2(p_1+\cdots+p_n)\leq \frac{p_1+2p_2+\cdots+np_n}{n+1}+(n+1)(p_1+\frac{1}{2}p_2+\cdots+\frac{1}{n}p_n).$$

(On pourra considérer la différence).

3) Notons $S_n=\sum_{k=1}^{n}p_k,\ A_n=\sum_{k=1}^{n}kp_k,\ B_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}p_k$ et $D_n=A_n\times B_n-S_n^2$.

a) Etablir que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ D_{n+1}=D_n+p_{n+1}\Big(\frac{A_n}{n+1}+(n+1)B_n-2S_n\Big).$$

b) En utilisant la question **2)**, montrer par récurrence que, si $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs, on a l'inégalité :

$$\forall n\geq 1,\ \Big(\sum_{k=1}^{n}p_k\Big)^2\leq\Big(\sum_{k=1}^{n}kp_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}p_k\Big).$$

4) Soit Z une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que Z admet une espérance $E(Z)$.

Montrer que la variable $\frac{1}{Z}$ admet aussi une espérance et que l'on a :

$$E(\frac{1}{Z})\geq\frac{1}{E(Z)}.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.