



## PROBABILITÉS DISCRÈTES

## ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

## ÉNONCÉ :

## ÉNONCÉ-11

Un dé possède six faces numérotées 1 à 6. La probabilité d'apparition du 5 à chaque lancer est  $p \in ]0; 1[$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  ; on lance le dé  $k$  fois et on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où le numéro 5 est apparu.

1) Pour quelles valeurs de  $k$  la probabilité  $P\left(\frac{X}{k} = \frac{1}{6}\right)$  est-elle non nulle ?

2) Étudier les variations de la fonction  $x \in ]0; 1[ \mapsto \left(\frac{6}{5}\right)^5 x(1-x)^5$ .

3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $k = 6n$  ; calculer  $a_n = P(X = n)$ .

4) On suppose  $p \neq \frac{1}{6}$ .

a) Montrer que :  $a_n \leq P(|X - 6np| \geq n | 1 - 6p |)$ .

b) En déduire un majorant de  $na_n$ , majorant bien-sûr indépendant de  $n$  (on pourra penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff).

c) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

5) a) Déduire de la question précédente que :

$$\exists L \in ]0; 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad / \quad \forall n \geq n_0, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L.$$

b) Montrer alors que

$$\exists A > 0, \quad / \quad \forall n \geq n_0, \quad a_n \leq A.L^n.$$

c) Montrer que la série de terme général  $a_n$  converge.

## INDICATIONS DE SOLUTION

- Pour la question 4, Ecrire  $(X = n) = (X - 6np = n(1 - 6p))$  , puis comparer les événements  $(X - 6np = n(1 - 6p))$  et  $(|X - 6np| = |n(1 - 6p)|)$
- Pour la question 5, utiliser la définition de la limite (avec les quantificateurs)