PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−15

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p) \quad \text{où} \quad p \in]0,1[.$$

On pose $Y_n = X_n \times X_{n+1}$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $V_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1) Calculer les espérances et les variances de S_n et de V_n.

2) a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et T_1, T_2, Z trois variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant toutes les trois un nombre fini de valeurs.

Montrer que $\operatorname{cov}(aT_1 + bT_2, Z) = a\operatorname{cov}(T_1, Z) + b\operatorname{cov}(T_2, Z)$.

En déduire que $\operatorname{cov}(Z, aT_1 + bT_2) = a\operatorname{cov}(Z, T_1) + b\operatorname{cov}(Z, T_2)$.

b) Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $T_1, \dots, T_n, Z$, $n+1$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant un nombre fini de valeurs.

Montrer que

$$\operatorname{cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i T_i, Z\Big) = \sum_{1\leq i\leq n} a_i \operatorname{cov}(T_i, Z).$$

c) Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $T_1, \dots, T_n, Z_1, \dots, Z_n$, $2n$ variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que

$$\operatorname{cov}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i T_i, \sum_{k=1}^{n} b_k Z_k\Big) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq k\leq n}} a_i b_k \operatorname{cov}(T_i, Z_k).$$

3) Calculer $\operatorname{cov}(S_n, V_n)$.

INDICATIONS DE SOLUTION

Question 1−b) : On étudiera l'indépendance des variables Y_i pour le calcul de $V(X_n)$