PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE−17

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite infinie de joueurs qui jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée de la manière suivante :

A_1 rencontre A_2, le perdant est éliminé, le gagnant rencontre A_3 ; le perdant est éliminé, le gagnant rencontre A_4, etc...

Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur a gagné trois parties consécutives. Ce joueur est alors déclaré vainqueur.

On note G_n l'événement "A_n est vainqueur" et $p_n = P(A_n)$.

1) Calculer $p_1, \ldots, p_4$.

2) Soit J_n l'événement : "A_n joue pour la première fois" et $q_n = P(J_n)$.

a) Montrer que, pour $n \geq 5$, A_n ne peut jouer pour la première fois que contre A_{n-2} ou A_{n-1}.

b) Montrer que, pour $n \geq 5$, $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$.

3) Calculer q_n en fonction de n.

4) En déduire que

$$\forall n \geq 3,\ p_n = \frac{1}{2^{2n-1}\sqrt{5}}\big((1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}\big).$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE