PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–17

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite infinie de joueurs qui jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée de la manière suivante :

A_1 rencontre A_2, le perdant est éliminé, le gagnant rencontre A_3 ; le perdant est éliminé, le gagnant rencontre A_4, etc...

Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur a gagné trois parties consécutives. Ce joueur est alors déclaré vainqueur.

On note G_n l'événement "A_n est vainqueur" et $p_n = P(A_n)$.

1) Calculer $p_1, \ldots, p_4$.

2) Soit J_n l'événement : "A_n joue pour la première fois" et $q_n = P(J_n)$.

a) Montrer que, pour $n \geq 5$, A_n ne peut jouer pour la première fois que contre A_{n-2} ou A_{n-1}.

b) Montrer que, pour $n \geq 5$, $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$.

3) Calculer q_n en fonction de n.

4) En déduire que

$$\forall n \geq 3,\ p_n = \frac{1}{2^{2n-1}\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^{n-1} - (1-\sqrt{5})^{n-1}\right).$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.