PROBABILITES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE :

ENONCE–18

On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On y effectue une suite de tirages d'une boule à la fois avec remise.

On définit la suite de variables X_k de la manière suivante :

X_1 est la variable certaine égale à 1. Pour $p \geq 2$, $X_p = 1$ si le numéro obtenu au $p^{\text{ème}}$ tirage n'a pas déjà été obtenu au cours des tirages précédents et $X_p = 0$ dans le cas contraire.

1) Déterminer la loi de X_2.

2) Montrer que X_p suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-1}$.

3) a) Montrer que :

$$\forall i < j,\ P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}.$$

b) En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

c) Calculer la covariance de (X_i, X_j). Conclusion ?

4) Soit $N \geq 2$. On note Z_N la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des N premiers tirages. Exprimer Z_N en fonction des X_k et en déduire son espérance $E(Z_N)$.

5) Donner un équivalent simple de $E(Z_N)$ lorsque $n \to +\infty$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

INDICATIONS DE SOLUTION

Question 2 : pour étudier la varfiable X_p , considérer que l'on n' effectue que p tirages .

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.