



PROBABILITÉS DISCRETES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ :

ÉNONCÉ-9

Trois enfants A, B, C jouent à la balle.

Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il la lance à B est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.

Lorsque B a la balle, la probabilité pour qu'il la lance à A est $\frac{3}{4}$, la probabilité pour qu'il la lance à C est $\frac{1}{4}$.

C envoie toujours la balle à B .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n (resp B_n, C_n) l'événement « A (resp B, C) a la balle à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer ».

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$.

Au départ la balle est lancée à l'un des trois joueurs ; c'est par convention le lancer numéro 0. Donc on pose $a_0 = P(A_0)$, $b_0 = P(B_0)$, $c_0 = P(C_0)$ avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

1) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Montrer, en la déterminant, qu'il existe une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = D^n X_0.$$

2) Calculer X_n en fonction de n .

3) Calculer les limites de a_n , b_n et c_n quand n tend vers $+\infty$.