



MECANIQUE

ENERGETIQUE

L'expression de l'énergie cinétique ayant été vue lors du cours de cinétique - dynamique, nous n'en redonnons pas ici l'expression. On se contentera ici d'en donner des applications

1 Puissance

Définition : Soient deux ensembles matériels (S_1) et (S_2). Si à l'instant t , (S_1) exerce sur (S_2) une densité de force $d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M)$; la puissance développée, à l'instant t , par l'action mécanique de (S_1) sur (S_2), dans le mouvement de (S_2) par rapport à un référentiel d'étude (R) s'écrit et se note :

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \cdot \vec{V}(M \in S_2 / R) \text{ en } W \text{ (Watt)} = Nms^{-1}$$

D'après le champs des vecteurs vitesse d'un solide, on peut écrire :

$$\vec{V}(M \in S_2 / R) = \vec{V}(A \in S_2 / R) + \overline{MA} \wedge \overline{\Omega}(S_2 / R). \text{ En introduisant cette relation dans la}$$

définition ci-dessus, on a alors :

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \cdot \vec{V}(A \in S_2 / R) + \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \cdot [\overline{MA} \wedge \overline{\Omega}(S_2 / R)]$$

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R) = \vec{V}(A \in S_2 / R) \cdot \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) + \int_{\forall M \in S_2} \overline{\Omega}(S_2 / R) \cdot [d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \wedge \overline{MA}]$$

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R) = \vec{V}(A \in S_2 / R) \cdot \overline{R}(S_1 \rightarrow S_2) + \overline{\Omega}(S_2 / R) \cdot \int_{\forall M \in S_2} \overline{AM} \wedge d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M)$$

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R) = \vec{V}(A \in S_2 / R) \cdot \overline{R}(S_1 \rightarrow S_2) + \overline{\Omega}(S_2 / R) \cdot \overline{M}_A(S_1 \rightarrow S_2)$$

avec : $\overline{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M)$ résultante des actions mécaniques qu'exerce S_1 sur S_2 , et

$$\overline{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{\forall M \in S_2} \overline{AM} \wedge d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \text{ moment résultant en A des actions mécaniques de } S_1 \text{ sur } S_2$$

On voit donc apparaître dans l'expression de la puissance les deux torseurs :

$$\text{cinématique de } S_2/R: \{V(S_2 / R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}(S_2 / R) \\ \vec{V}(A \in S_2 / R) \end{array} \right\} \text{ et}$$

$$\text{des actions mécaniques de } S_1 \text{ sur } S_2: \{T(S_1 / S_2)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \overline{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\}$$

On a donc :

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}(S_2 / R) \\ \vec{V}(A \in S_2 / R) \end{array} \right\} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \overline{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Omega}(S_2 / R) \\ \vec{V}(A \in S_2 / R) \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overline{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \overline{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\}_A$$

La puissance développée par les efforts de 1 sur 2 dans le mouvement de 2/R est donc le « produit » des torseurs cinématiques du mouvement de 2 par rapport à R et du torseur des actions mécaniques qu'exerce 1 sur 2. On entend ici par produit de torseur, la somme des deux produits scalaires **Résultante d'un torseur scalaire Moment de l'autre**. Cette puissance peut se calculer à partir des torseurs réduits en un même point qui par contre peut être quelconque.

La notion de puissance dépend du repère d'étude :

Soient deux repères R_0 et R_3 et deux solides S_1 et S_2 :

D'après la composition des vecteurs vitesses, on peut écrire :

$\vec{V}(M \in S_2 / R_0) = \vec{V}(M \in S_2 / R_3) + \vec{V}(M \in R_3 / R_0)$, donc si on calcul la puissance développée

par les efforts qu'exerce S_1 sur S_2 dans son mouvement par rapport R_0 $P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0)$, puis par rapport à R_3 $P(S_1 \rightarrow S_2 / R_3)$:

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \cdot \vec{V}(M \in S_2 / R_0) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \cdot [\vec{V}(M \in S_2 / R_3) + \vec{V}(M \in R_3 / R_0)]$$

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) = \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \cdot \vec{V}(M \in S_2 / R_3) + \int_{\forall M \in S_2} d\vec{f}_{1 \rightarrow 2}(M) \cdot \vec{V}(M \in R_3 / R_0)$$

$$P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) = P(S_1 \rightarrow S_2 / R_3) + \underbrace{\{V(R_3 / R_0)\} \otimes_A \{T(S_1 \rightarrow S_2)\}}_{\neq 0}$$

Définition : Puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels S_1 et S_2 : On la note $P(S_1 \leftrightarrow S_2)$ et cette quantité vaut :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) + P(S_2 \rightarrow S_1 / R_0)$$

Remarque : Cette puissance ne dépend pas du repère R_0 choisi pour la calculer : Soit un second repère d'étude noté R_3 :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2 / R_0) + P(S_2 \rightarrow S_1 / R_0)$$

$$= \{V(S_2 / R_0)\} \otimes_A \{T(S_1 \rightarrow S_2)\} + \{V(S_1 / R_0)\} \otimes_A \{T(S_2 \rightarrow S_1)\}$$

$$= \left[\{V(S_2 / R_3)\} + \{V(R_3 / R_0)\} \right] \otimes_A \{T(S_1 \rightarrow S_2)\} +$$

$$\left[\{V(S_1 / R_3)\} + \{V(R_3 / R_0)\} \right] \otimes_A \{T(S_2 \rightarrow S_1)\}$$

$$= \underbrace{\{V(S_2 / R_3)\} \otimes_A \{T(S_1 \rightarrow S_2)\}}_{P(S_1 \rightarrow S_2 / R_3)} + \underbrace{\{V(S_1 / R_3)\} \otimes_A \{T(S_2 \rightarrow S_1)\}}_{P(S_2 \rightarrow S_1 / R_3)} +$$

$$\{V(R_3 / R_0)\} \otimes \underbrace{\left[\{T(S_2 \rightarrow S_1)\} + \{T(S_1 \rightarrow S_2)\} \right]}_{\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}}$$

$$= P(S_1 \rightarrow S_2 / R_3) + P(S_2 \rightarrow S_1 / R_3)$$

$$= P(S_1 \leftrightarrow S_2)$$

Liaisons parfaites entre solides :

Si S_1 et S_2 sont en liaison parfaites, cela signifie que l'on a :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 P(S_1 \leftrightarrow S_2) &= P(S_1 \rightarrow S_2 / S_2) + P(S_2 \rightarrow S_1 / S_2) \\
 0 &= \underbrace{{}_A \{V(S_2 / S_2)\}}_{\text{torseur nul}} \otimes_A \{T(S_1 \rightarrow S_2)\} + {}_A \{V(S_1 / S_2)\} \otimes_A \{T(S_2 \rightarrow S_1)\} \\
 0 &= {}_A \{V(S_1 / S_2)\} \otimes_A \{T(S_2 \rightarrow S_1)\}
 \end{aligned}$$

Les deux torseurs (cinématique et des actions mécaniques transmissibles) sont donc complémentaires : les zéros de la résultante de l'un correspondent aux composantes non nulles du moment de l'autre :

$$\begin{aligned}
 0 = P(S_1 \leftrightarrow S_2) &= {}_o \{V(S_1 / S_2)\} \otimes {}_o \{T(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix} \\
 0 &= Xv_x + Yv_y + Zv_z + L\omega_x + M\omega_y + N\omega_z
 \end{aligned}$$

Exemple sur la liaison Pivot glissante d'axe ($O\bar{x}$) entre les deux solides S_1 et S_2 :

$$0 = P(S_1 \leftrightarrow S_2) = {}_o \{V(S_1 / S_2)\} \otimes {}_o \{T(S_2 \rightarrow S_1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & v_y \\ 0 & v_z \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$$

2 Travail

Définition : Le travail entre deux instants t_1 et t_2 de l'action mécanique qu'exerce un solide (S_2) sur un solide (S_1) dans le mouvement de (S_1) par rapport à un référentiel R vaut :

$$W_{t_1}^{t_2}(S_2 \rightarrow S_1 / R) = \int_{t_1}^{t_2} P(S_2 \rightarrow S_1 / R) dt \text{ en J (Joule)}$$

Cette relation entre travail et puissance peut s'écrire sous forme de dérivation :

$$P(S_2 \rightarrow S_1 / R) = \frac{d(W(S_2 \rightarrow S_1 / R))}{dt}$$

3 Energie potentielle

Définition : Un ensemble matériel (S_1) possède une énergie potentielle associée à l'action mécanique qu'exerce un ensemble matériel (S_2) dans le mouvement de (S_1) par rapport à un référentiel R si il existe une fonction scalaire notée

$E_p(S_2 \rightarrow S_1 / R)$ telle que l'on puisse écrire :

$$P(S_2 \rightarrow S_1 / R) = - \frac{d[E_p(S_2 \rightarrow S_1 / R)]}{dt}$$

E_p est alors l'énergie potentielle de S_2 due à l'action de S_1 dans son mouvement par rapport à R.