MECANIQUE

ENERGETIQUE

L'expression de l'énergie cinétique ayant été vue lors du cours de cinétique - dynamique, nous n'en redonnons pas ici l'expression. On se contentera ici d'en donner des applications

1 Puissance

Définition : Soient deux ensembles matériels (S_1) et (S_2). Si à l'instant t, (S_1) exerce sur (S_2) une densité de force $\vec{df}_{1\to2}(M)$; la puissance développée, à l'instant t, par l'action mécanique de (S_1) sur (S_2), dans le mouvement de (S_2) par rapport à un référentiel d'étude (R) s'écrit et se note :

$$P(S_1 \to S_2 / R) = \int_{\forall M \in S_2} \vec{df}_{1\to2}(M).\vec{V}(M \in S_2 / R)$$ *en W (Watt) = Nms^{-1}*

D'après le champs des vecteurs vitesse d'un solide, on peut écrire :
$\vec{V}(M \in S_2 / R) = \vec{V}(A \in S_2 / R) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}(S_2 / R)$. En introduisant cette relation dans la définition ci-dessus, on a alors :

$$P(S_1 \to S_2 / R) = \int_{\forall M \in S_2} \vec{df}_{1\to2}(M).\vec{V}(A \in S_2 / R) + \int_{\forall M \in S_2} \vec{df}_{1\to2}(M).\left[\overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}(S_2 / R)\right]$$

$$P(S_1 \to S_2 / R) = \vec{V}(A \in S_2 / R).\int_{\forall M \in S_2} \vec{df}_{1\to2}(M) + \int_{\forall M \in S_2} \vec{\Omega}(S_2 / R).\left[\vec{df}_{1\to2}(M) \wedge \overrightarrow{MA}\right]$$

$$P(S_1 \to S_2 / R) = \vec{V}(A \in S_2 / R).\vec{R}(S_1 \to S_2) + \vec{\Omega}(S_2 / R).\int_{\forall M \in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{df}_{1\to2}(M)$$

$$P(S_1 \to S_2 / R) = \vec{V}(A \in S_2 / R).\vec{R}(S_1 \to S_2) + \vec{\Omega}(S_2 / R).\overrightarrow{M_A}(S_1 \to S_2)$$

avec : $\vec{R}(S_1 \to S_2) = \int_{\forall M \in S_2} \vec{df}_{1\to2}(M)$ résultante des actions mécaniques qu'exerce S_1 sur S_2, et

$\overrightarrow{M_A}(S_1 \to S_2) = \int_{\forall M \in S_2} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{df}_{1\to2}(M)$ moment résultant en A des actions mécaniques de S_1 sur S_2

On voit donc apparaître dans l'expression de la puissance les deux torseurs :

cinématique de S_2/R: $\{V(S_2 / R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2 / R) \\ \vec{V}(A \in S_2 / R) \end{Bmatrix}_A$ et

des actions mécaniques de S_1 sur S_2 : $\{T(S_1 / S_2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \to S_2) \\ \overrightarrow{M_A}(S_1 \to S_2) \end{Bmatrix}_A$

On a donc :

$$P(S_1 \to S_2 / R) = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_2 / R) \\ \vec{V}(A \in S_2 / R) \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \to S_2) \\ \overrightarrow{M_A}(S_1 \to S_2) \end{Bmatrix} = {}_A\{V(S_2 / R)\} \otimes {}_A\{T(S_1 \to S_2)\}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

La puissance développée par les efforts de 1 sur 2 dans le mouvement de 2/R est donc le « produit » des torseurs cinématiques du mouvement de 2 par rapport à R et du torseur des actions mécaniques qu'exerce 1 sur 2. On entend ici par produit de torseur, la somme des deux produits scalaires ***Résultante d'un torseur scalaire Moment de l'autre****. Cette puissance peut se calculer à partir des torseurs réduits en un même point qui par contre peut être quelconque.*

La notion de puissance dépend du repère d'étude :
Soient deux repères R_0 et R_3 et deux solides S_1 et S_2:
D'après la composition des vecteurs vitesses, on peut écrire :
$\vec{V}(M\in S_2/R_0)=\vec{V}(M\in S_2/R_3)+\vec{V}(M\in R_3/R_0)$, donc si on calcul la puissance développée par les efforts qu'exerce S_1 sur S_2 dans son mouvement par rapport R_0 $P(S_1\to S_2/R_0)$, puis par rapport à R_3 $P(S_1\to S_2/R_3)$:

$$P(S_1\to S_2/R_0)=\int_{\forall M\in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\vec{V}(M\in S_2/R_0)=\int_{\forall M\in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\left[\vec{V}(M\in S_2/R_3)+\vec{V}(M\in R_3/R_0)\right]$$

$$P(S_1\to S_2/R_0)=\int_{\forall M\in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\vec{V}(M\in S_2/R_3)+\int_{\forall M\in S_2} d\vec{f}_{1\to 2}(M).\vec{V}(M\in R_3/R_0)$$

$$P(S_1\to S_2/R_0)=P(S_1\to S_2/R_3)+\underbrace{{}_A\{V(R_3/R_0)\}\otimes {}_A\{T(S_1\to S_2)\}}_{\neq 0}$$

Définition : Puissance développée par les actions mutuelles entre deux ensembles matériels S_1 et S_2 : On la note $P(S_1\leftrightarrow S_2)$ et cette quantité vaut :

$$\boxed{P(S_1\leftrightarrow S_2)=P(S_1\to S_2/R_0)+P(S_2\to S_1/R_0)}$$

Remarque : Cette puissance ne dépend pas du repère R_0 choisi pour la calculer : Soit un second repère d'étude noté R_3 :

$$\begin{aligned}
P(S_1\leftrightarrow S_2)&=P(S_1\to S_2/R_0)+P(S_2\to S_1/R_0)\\
&={}_A\{V(S_2/R_0)\}\otimes {}_A\{T(S_1\to S_2)\}+{}_A\{V(S_1/R_0)\}\otimes {}_A\{T(S_2\to S_1)\}\\
&=\left[{}_A\{V(S_2/R_3)\}+{}_A\{V(R_3/R_0)\}\right]\otimes {}_A\{T(S_1\to S_2)\}+\\
&\left[{}_A\{V(S_1/R_3)\}+{}_A\{V(R_3/R_0)\}\right]\otimes {}_A\{T(S_2\to S_1)\}\\
&=\underbrace{{}_A\{V(S_2/R_3)\}\otimes {}_A\{T(S_1\to S_2)\}}_{P(S_1\to S_2/R_1)}+\underbrace{{}_A\{V(S_1/R_3)\}\otimes {}_A\{T(S_2\to S_1)\}}_{P(S_2\to S_1/R_1)}+\\
&{}_A\{V(R_3/R_0)\}\otimes\underbrace{\left[{}_A\{T(S_2\to S_1)\}+{}_A\{T(S_1\to S_2)\}\right]}_{=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}}\\
&=P(S_1\to S_2/R_3)+P(S_2\to S_1/R_3)\\
&=P(S_1\leftrightarrow S_2)
\end{aligned}$$

Liaisons parfaites entre solides :

Si S_1 et S_2 sont en liaison parfaites, cela signifie que l'on a : $\boxed{P(S_1\leftrightarrow S_2)=0}$

On peut alors écrire :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2 / S_2) + P(S_2 \rightarrow S_1 / S_2)$$

$$0 = \underbrace{{}_A\{V(S_2/S_2)\}}_{\text{torseur nul}} \otimes {}_A\{T(S_1 \rightarrow S_2)\} + {}_A\{V(S_1/S_2)\} \otimes {}_A\{T(S_2 \rightarrow S_1)\}$$

$$0 = {}_A\{V(S_1/S_2)\} \otimes {}_A\{T(S_2 \rightarrow S_1)\}$$

Les deux torseurs (cinématique et des actions mécaniques transmissibles) sont donc complémentaires : les zéros de la résultante de l'un correspondent aux composantes non nulles du moment de l'autre :

$$0 = P(S_1 \leftrightarrow S_2) = {}_O\{V(S_1/S_2)\} \otimes {}_O\{T(S_2 \rightarrow S_1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{Bmatrix} \otimes {}_O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

$$0 = Xv_x + Yv_y + Zv_z + L\omega_x + M\omega_y + N\omega_z$$

Exemple sur la liaison Pivot glissante d'axe $(O\vec{x})$ ente les deux solides S_1 et S_2:

$$0 = P(S_1 \leftrightarrow S_2) = {}_O\{V(S_1/S_2)\} \otimes {}_O\{T(S_2 \rightarrow S_1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & v_y \\ 0 & v_z \end{Bmatrix} \otimes {}_O\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$$

2 Travail

Définition : Le travail entre deux instants t_1 et t_2 de l'action mécanique qu'exerce un solide (S_2) sur un solide (S_1) dans le mouvement de (S_1) par rapport à un référentiel R vaut :

$$W_{t1}^{t2}(S_2 \rightarrow S_1 / R) = \int_{t1}^{t2} P(S_2 \rightarrow S_1 / R)dt$$ *en J (Joule)*

Cette relation entre travail et puissance peut s'écrire sous forme de dérivation :

$$P(S_2 \rightarrow S_1 / R) = \frac{d\left(W(S_2 \rightarrow S_1 / R)\right)}{dt}$$

3 Energie potentielle

Définition : Un ensemble matériel (S_1) possède une énergie potentielle associée à l'action mécanique qu'exerce un ensemble matériel (S_2) dans le mouvement de (S_1) par rapport à un référentiel R si il existe une fonction scalaire notée $E_P(S_2 \rightarrow S_1 / R)$ telle que l'on puisse écrire :

$$P(S_2 \rightarrow S_1 / R) = -\frac{d\left[E_P(S_2 \rightarrow S_1 / R)\right]}{dt}$$

E_P est alors l'énergie potentielle de S_2 due à l'action de S_1 dans son mouvement par rapport à R.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 9 pages.