Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On pose $b_0 = 1$ et $b_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-a_k)$ pour $n \geq 1$. Montrer que $b_{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ pour tout n.

Exercice 2 [Corrigé]

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

Montrer que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 3 [Corrigé]

On se donne n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $[0,1]$. On pose $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_j - x_i|$.

Cette quantité est donc la somme des distances entre les différents x_i.

1. Montrer qu'on peut choisir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de telle sorte que :
   - Si n est pair ($n = 2m$) alors $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m^2$.
   - Si n est impair ($n = 2m+1$) alors $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m^2 + m$.
2. Montrer que les valeurs ainsi obtenues sont en fait des maximums.

Exercice 4 [Corrigé]

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose $x^{(0)} = 1$ et $x^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.

Montrer l'égalité $(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$ pour tous réels x, y et tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 5 [Corrigé]

Étudier les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ définies par $0 < u_1 < u_0$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_n u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}}$ pour tout n.

Exercice 6 [Corrigé]

On se donne un réel a de $]0,1[$ et pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$.

Simplifier l'expression u_n et en déduire $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 7 [Corrigé]

On une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels.

Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum \cos(x_0 \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)$, où la somme est étendue à toutes les combinaisons possibles de signes devant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (et il y en a 2^n.)

Ainsi $\begin{cases} S_1 = \cos(x_0 + x_1) + \cos(x_0 - x_1) \\ S_2 = \cos(x_0 + x_1 + x_2) + \cos(x_0 + x_1 - x_2) + \cos(x_0 - x_1 + x_2) + \cos(x_0 - x_1 - x_2) \end{cases}$

Donner une expression factorisée de S_n.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

La propriété est vraie pour $n = 0$ car elle se réduit à $b_1 = 1 - a_0$.

Supposons qu'elle soit vrai au rang n_1, avec $n \geq 1$, c'est-à-dire que $b_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k$.

Alors $b_{n+1} = \prod_{k=0}^{n}(1 - a_k) = (1 - a_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1 - a_k) = (1 - a_n)b_n = b_n - a_n b_n$

$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k - a_n b_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

La propriété est vraie si $n = 2$ car $u_2 = 2$ donc $\sqrt{2} < u_2 < 1 + \sqrt{2}$.

Supposons que la double inégalité $\sqrt{n} < u_n < 1 + \sqrt{n}$ soit vraie pour un certain $n \geq 2$.

Puisque $u_n > \sqrt{n}$, on a $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n} < 1 + \sqrt{n} < 1 + \sqrt{n+1}$.

L'inégalité $\sqrt{n+1} < u_{n+1}$ équivaut à $\sqrt{n+1} < 1 + \dfrac{n}{u_n}$ c'est-à-dire $u_n < \dfrac{n}{\sqrt{n+1} - 1}$ ou encore à l'inégalité $u_n < \sqrt{n+1} + 1$ (par utilisation de la quantité conjuguée.)

Mais cette dernière est une conséquence immédiate de l'hypothèse $u_n < \sqrt{n} + 1$.

On a ainsi prouvé la propriété au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. – Si $n = 2m$, on place $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en 0 et $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$ en 1.
   Il y a m^2 distances $|x_j - x_i|$ égales à 1, avec $1 \leq i \leq m$ et $m + 1 \leq j \leq 2m$.
   Toutes les autres distances $|x_j - x_i|$ sont nulles. On a bien $s(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = m^2$.
   – Si $n = 2m + 1$, on place $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en 0 et $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m+1}$ en 1.
   Il y a $m(m + 1)$ distances $|x_j - x_i|$ égales à 1, avec $1 \leq i \leq m$ et $m + 1 \leq j \leq 2m + 1$.
   Toutes les autres distances $|x_j - x_i|$ sont nulles. On a bien $s(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = m^2 + m$.
2. – Si $n = 2$ ($n = 2m$ où $m = 1$) $s(x_1, x_2) = |x_2 - x_1| \leq 1$: $m^2 = 1$ est bien un maximum.
   – Si $n = 3$ ($n = 2m + 1$ où $n = 1$), $s(x_1, x_2, x_3) = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_1| + |x_3 - x_2|$.
   On peut bien supposer que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ puisque x_1, x_2, x_3 jouent le même rôle.
   Alors $s(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) + (x_3 - x_2) = 2(x_3 - x_1) \leq 2$.
   La valeur $m^2 + m = 2$ est donc bien un maximum.
   – On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 2$ et on se donne les $n + 2$ réels $x_1, \ldots, x_{n+2}$.
   Comme ils jouent le même rôle, on peut supposer $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n+1} \leq x_{n+2}$.
   Dans ces conditions, en isolant les points x_1 et x_{n+2} :
   $s(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_{n+2} - x_1 + \sum_{j=2}^{n+1}(x_j - x_0) + \sum_{j=2}^{n+1}(x_{n+2} - x_j) + \sum_{2 \leq i < j \leq n+1}(x_j - x_i)$.
   Ainsi $s(x_1, \ldots, x_{n+2}) = (n + 1)(x_{n+2} - x_0) + s(x_2, \ldots, x_{n+1}) \leq n + 1 + s(x_2, \ldots, x_{n+1})$.