Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes.

On pose $b_0 = 1$ et $b_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-a_k)$ pour $n \geq 1$. Montrer que $b_{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ pour tout n.

Exercice 2 [Corrigé]

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$.

Montrer que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 3 [Corrigé]

On se donne n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $[0,1]$. On pose $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_j - x_i|$.

Cette quantité est donc la somme des distances entre les différents x_i.

1. Montrer qu'on peut choisir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de telle sorte que :
   - Si n est pair $(n = 2m)$ alors $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m^2$.
   - Si n est impair $(n = 2m+1)$ alors $s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m^2 + m$.
2. Montrer que les valeurs ainsi obtenues sont en fait des maximums.

Exercice 4 [Corrigé]

Pour tout x de $\mathbb{R}$ on pose $x^{(0)} = 1$ et $x^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.

Montrer l'égalité $(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} y^{(n-k)}$ pour tous réels x, y et tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 5 [Corrigé]

Étudier les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ définies par $0 < u_1 < u_0$ et $u_{n+2} = \dfrac{u_n u_{n+1}}{2u_n - u_{n+1}}$ pour tout n.

Exercice 6 [Corrigé]

On se donne un réel a de $]0,1[$ et pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$.

Simplifier l'expression u_n et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 7 [Corrigé]

On une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels.

Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum \cos(x_0 \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)$, où la somme est étendue à toutes les combinaisons possibles de signes devant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (et il y en a 2^n.)

Ainsi $\begin{cases} S_1 = \cos(x_0 + x_1) + \cos(x_0 - x_1) \\ S_2 = \cos(x_0 + x_1 + x_2) + \cos(x_0 + x_1 - x_2) + \cos(x_0 - x_1 + x_2) + \cos(x_0 - x_1 - x_2) \end{cases}$

Donner une expression factorisée de S_n.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

La propriété est vraie pour $n = 0$ car elle se réduit à $b_1 = 1 - a_0$.

Supposons qu'elle soit vrai au rang n_1, avec $n \geq 1$, c'est-à-dire que $b_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k$.

Alors $b_{n+1} = \prod_{k=0}^{n}(1-a_k) = (1-a_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1-a_k) = (1-a_n)b_n = b_n - a_n b_n$

$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k - a_n b_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

La propriété est vraie si $n = 2$ car $u_2 = 2$ donc $\sqrt{2} < u_2 < 1 + \sqrt{2}$.

Supposons que la double inégalité $\sqrt{n} < u_n < 1 + \sqrt{n}$ soit vraie pour un certain $n \geq 2$.

Puisque $u_n > \sqrt{n}$, on a $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n} < 1 + \sqrt{n} < 1 + \sqrt{n+1}$.

L'inégalité $\sqrt{n+1} < u_{n+1}$ équivaut à $\sqrt{n+1} < 1 + \dfrac{n}{u_n}$ c'est-à-dire $u_n < \dfrac{n}{\sqrt{n+1}-1}$ ou encore à l'inégalité $u_n < \sqrt{n+1} + 1$ (par utilisation de la quantité conjuguée.)

Mais cette dernière est une conséquence immédiate de l'hypothèse $u_n < \sqrt{n} + 1$.

On a ainsi prouvé la propriété au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. – Si $n = 2m$, on place $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en 0 et $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m}$ en 1.
   Il y a m^2 distances $|x_j - x_i|$ égales à 1, avec $1 \leq i \leq m$ et $m + 1 \leq j \leq 2m$.
   Toutes les autres distances $|x_j - x_i|$ sont nulles. On a bien $s(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = m^2$.
   – Si $n = 2m + 1$, on place $x_1, x_2, \ldots, x_m$ en 0 et $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{2m+1}$ en 1.
   Il y a $m(m + 1)$ distances $|x_j - x_i|$ égales à 1, avec $1 \leq i \leq m$ et $m + 1 \leq j \leq 2m + 1$.
   Toutes les autres distances $|x_j - x_i|$ sont nulles. On a bien $s(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = m^2 + m$.
2. – Si $n = 2$ ($n = 2m$ où $m = 1$) $s(x_1, x_2) = |x_2 - x_1| \leq 1 : m^2 = 1$ est bien un maximum.
   – Si $n = 3$ ($n = 2m + 1$ où $n = 1$), $s(x_1, x_2, x_3) = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_1| + |x_3 - x_2|$.
   On peut bien supposer que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ puisque x_1, x_2, x_3 jouent le même rôle.
   Alors $s(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_1) + (x_3 - x_2) = 2(x_3 - x_1) \leq 2$.
   La valeur $m^2 + m = 2$ est donc bien un maximum.
   – On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 2$ et on se donne les $n + 2$ réels $x_1, \ldots, x_{n+2}$.
   Comme ils jouent le même rôle, on peut supposer $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n+1} \leq x_{n+2}$.
   Dans ces conditions, en isolant les points x_1 et x_{n+2} :
   $$s(x_1, \ldots, x_{n+2}) = x_{n+2} - x_1 + \sum_{j=2}^{n+1}(x_j - x_0) + \sum_{j=2}^{n+1}(x_{n+2} - x_j) + \sum_{2 \leq i < j \leq n+1}(x_j - x_i).$$
   Ainsi $s(x_1, \ldots, x_{n+2}) = (n + 1)(x_{n+2} - x_0) + s(x_2, \ldots, x_{n+1}) \leq n + 1 + s(x_2, \ldots, x_{n+1})$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.