

## Énoncés des exercices

# Exercice 1 [Corrigé]

Déterminer les polynômes définis par  $P_0(x) = 1$  et  $P_n(x) = n \int_0^x P_{n-1}(t+1) dt$  pour  $n \ge 1$ .

#### EXERCICE 2 Corrigé

On définit 
$$\begin{cases} P_0(x)=0\\ P_1(x)=x-2\\ P_{n+2}(x)=xP_{n+1}(x)+(1-x)P_n(x) \end{cases}.$$
 Donner l'expression de  $P_n(x)$  pour tout  $n$ .

#### Exercice 3 Corrigé

On se donne une famille impaire  $z_1, z_2, \dots, z_{2n+1}$  de nombres complexes de module 1 et de partie réelle positive ou nulle. Montrer que  $|z_1 + z_2 + \cdots + z_{2n+1}| \ge 1$ . Peut-il y avoir égalité?

## Exercice 4 [Corrigé]

On se donne une application f de N dans N telle que  $f(n+1) \ge f(f(n)) + 1$  pour tout n de N.

- 1. Par récurrence sur n, montrer  $m \ge n \Rightarrow f(m) \ge n$  (et en particulier  $f(n) \ge n$ .)
- 2. En déduire que f est strictement croissante.
- 3. Montrer que f(n) < n+1 pour tout n, et en déduire l'unique solution f du problème.

## Exercice 5 Corrigé

Pour toute partie A finie non vide de  $\mathbb{N}$ , on note p(A) l'inverse du produit des éléments de A. Calculer  $u_n = \sum p(A)$ , où la somme est étendue aux parties non vides de  $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

# Exercice 6 Corrigé

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit n+2 nombres distincts dans  $E_n = \{1, \ldots, 2n\}$ . Montrer que l'au au moins est égal à la somme de deux autres.

Est-ce encore vrai si on en choisit seulement n+1?

# Exercice 7 [Corrigé]

On définit une suite  $(a_n)_{n\geq 0}$  par  $a_0=1$  et  $\begin{cases} a_{2n+1}=a_n\\ a_{2n+2}=a_n+a_{n+1} \end{cases}$  pour tout  $n\geq 0$ .

Soient r et s deux entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe n tel que  $a_n = r$  et  $a_{n+1} = s$ . Indication : récurrence forte sur la valeur de r + s.

# Exercice 8 [Corrigé]

On définit une suite  $(u_n)_{n\geq 0}$  par la donnée de  $u_0>0$  et par  $u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n^2}$  pour tout  $n\geq 0$ . Calculer  $u_n$  pour tout n en fonction  $u_0$ , et en déduire  $\lim_{n\to\infty} u_n$ .

Page 1 Jean-Michel Ferrard ©EduKlub S.A. www.klubprepa.net



#### Exercices de bon niveau sur le raisonnement par récurrence (II)

Énoncés

## Exercice 9 [Corrigé]

On écrit à la suite tous les entiers de 1 jusqu'à 2004.

On les efface de 3 en 3, en commençant par le premier (on efface donc 1, 4, 7, etc.)

On recommence alors la même opération sur la liste restante, et ainsi de suite.

On note  $a_n$  l'entier qui est en tête après n itérations  $(a_0=1,a_1=2,a_2=3,a_3=5,a_4=8,\cdots)$ 

Exprimer  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  (indication : discuter suivant la parité de  $a_n$ .)

Combien d'itérations faut-il pour que la liste initiale soit complètement effacée?

Page 2 Jean-Michel Ferrard www.klubprepa.net ©EduKlub S.A.