Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

Déterminer les polynômes définis par $P_0(x) = 1$ et $P_n(x) = n\displaystyle\int_0^x P_{n-1}(t+1)\,dt$ pour $n \geq 1$.

Exercice 2 [Corrigé]

On définit $\begin{cases} P_0(x) = 0 \\ P_1(x) = x - 2 \\ P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) + (1-x)P_n(x) \end{cases}$. Donner l'expression de $P_n(x)$ pour tout n.

Exercice 3 [Corrigé]

On se donne une famille impaire $z_1, z_2, \ldots, z_{2n+1}$ de nombres complexes de module 1 et de partie réelle positive ou nulle. Montrer que $|z_1 + z_2 + \cdots + z_{2n+1}| \geq 1$. Peut-il y avoir égalité ?

Exercice 4 [Corrigé]

On se donne une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(n+1) \geq f(f(n)) + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Par récurrence sur n, montrer $m \geq n \Rightarrow f(m) \geq n$ (et en particulier $f(n) \geq n$.)
2. En déduire que f est strictement croissante.
3. Montrer que $f(n) < n + 1$ pour tout n, et en déduire l'unique solution f du problème.

Exercice 5 [Corrigé]

Pour toute partie A finie non vide de $\mathbb{N}$, on note $p(A)$ l'inverse du produit des éléments de A.
Calculer $u_n = \sum p(A)$, où la somme est étendue aux parties non vides de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exercice 6 [Corrigé]

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit $n + 2$ nombres distincts dans $E_n = \{1, \ldots, 2n\}$.
Montrer que l'au au moins est égal à la somme de deux autres.
Est-ce encore vrai si on en choisit seulement $n + 1$?

Exercice 7 [Corrigé]

On définit une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ par $a_0 = 1$ et $\begin{cases} a_{2n+1} = a_n \\ a_{2n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$ pour tout $n \geq 0$.
Soient r et s deux entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe n tel que $a_n = r$ et $a_{n+1} = s$.
Indication : récurrence forte sur la valeur de $r + s$.

Exercice 8 [Corrigé]

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de $u_0 > 0$ et par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 + u_n^2}$ pour tout $n \geq 0$.
Calculer u_n pour tout n en fonction u_0, et en déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

EXERCICE 9 [Corrigé]

On écrit à la suite tous les entiers de 1 jusqu'à 2004.

On les efface de 3 en 3, en commençant par le premier (on efface donc 1, 4, 7, etc.)

On recommence alors la même opération sur la liste restante, et ainsi de suite.

On note a_n l'entier qui est en tête après n itérations ($a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8, \cdots$)

Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n (indication : discuter suivant la parité de a_n.)

Combien d'itérations faut-il pour que la liste initiale soit complètement effacée ?