Énoncés des exercices

Exercice 1 [Corrigé]

Montrer que tout n de $\mathbb{N}$, on a $\left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$ et $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$.

Exercice 2 [Corrigé]

Montrer que pour tous a, b de $\mathbb{N}^*$ on a $\left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| > \frac{1}{4b^2}$.

Exercice 3 [Corrigé]

Soient a, b, c des nombres réels. Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$.
On suppose que $|P(x)| \leq 1$ pour tout x de $[-1, 1]$. Montrer que : $\forall\, x \in [-1, 1],\ |P'(x)| \leq 4$.

Exercice 4 [Corrigé]

Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer le minimum de $x \mapsto S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |x - k|$.
Préciser quel(s) x ce minimum est atteint.

Exercice 5 [Corrigé]

Soit a, b, c les trois cotés d'un triangle. Montrer que $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 3(a^3+b^3+c^3)+4abc$.

Exercice 6 [Corrigé]

Soit $\mathcal{S}$ une famille finie de segments de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall\, (I, J) \in \mathcal{S}^2,\ I \cap J \neq \emptyset$.
Montrer que l'intersection de tous les segments I de $\mathcal{S}$ est non vide.

Exercice 7 [Corrigé]

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

Exercice 8 [Corrigé]

Soient α et β deux nombres irrationnels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.
Montrer que $A = \{[n\alpha],\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $B = \{[n\beta],\ n \in \mathbb{N}^*\}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 9 [Corrigé]

Montrer que l'ensemble $E = \{2^p 3^q,\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.
Indication : prouver que $F = \{p \ln 2 + q \ln 3, (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

Exercice 10 [Corrigé]

On note $f(n)$ le plus grand diviseur impair de n. Montrer que : $\forall\, n \geq 1,\ \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} - \frac{2n}{3} \right| < 1$.

Exercice 11 [Corrigé]

On suppose que $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ pour tout x de $[-1, 1]$, avec (a, b, c) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.
Montrer que $|b| \leq 8$ et que cette inégalité ne peut pas être améliorée.

Exercice 12 [Corrigé]

Trouver les applications de $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\, x \in E,\ f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 + x$.

Exercice 13 [Corrigé]

Montrer que $x = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 14 [Corrigé]

Soient a, b, c dans $\mathbb{Z}$ (non tous nuls) avec $|a|, |b|, |c| < 10^6$. Prouver $\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| > 10^{-20}$.
Montrer qu'il existe de tels entiers tels que $\left|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}\right| < 10^{-11}$.

Exercice 15 [Corrigé]

Trouver le maximum de $\sin^2 x \sin 2x$ sur $[0, \pi]$. En déduire $\left| \prod_{k=0}^{k=n} \sin 2^k x \right| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

Exercice 16 [Corrigé]

Trouver le minimum de la somme $\sum_{k=1}^{n} x_k$ si on suppose $\prod_{k=1}^{n} x_k = \alpha > 0$ (les x_k étant > 0.)

Exercice 17 [Corrigé]

Soit $f : x \mapsto x + [\sqrt{x}]$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = m \in \mathbb{N}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que l'un au moins des u_n est le carré d'un entier.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

– Posons $q = \left[\sqrt{4n+1}\right]$, et par l'absurde supposons $\left[\sqrt{4n+2}\right] \geq q+1$.
Alors $\sqrt{4n+1} < q+1 \leq \sqrt{4n+2}$ donc $4n+1 < q^2+2q+1 \leq 4n+2$.
Puisque tous sont ici des entiers la seule possibilité est $4n+2 = q^2+2q+1 = (q+1)^2$.
Or $\begin{cases} (q+1)^2 \equiv 1\ [4] & \text{si } q \text{ est pair} \\ (q+1)^2 \equiv 0\ [4] & \text{si } q \text{ est impair} \end{cases}$. On n'a donc jamais comme ici $(q+1)^2 \equiv 2\ [4]$.
Il en découle l'égalité des parties entières : $\left[\sqrt{4n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$.

– On a $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = 2n+1+2\sqrt{n^2+n}$. Mais $n \leq \sqrt{n^2+n} < n+\frac{1}{2}$.
Ainsi $\sqrt{4n+1} \leq \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2}$ donc $\left[\sqrt{4n+1}\right] \leq \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] \leq \left[\sqrt{4n+2}\right]$.
Avec le résultat de la première question, on obtient : $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+1}\right]$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, supposons qu'on ait $\left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{1}{4b^2}$.
Remarquons (cela sert à la ligne suivante) qu'alors $\left|\frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \leq \frac{1}{4b^2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{4} + \sqrt{2} < 2$.
Ainsi $\left|\frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \left|\frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right| < \frac{1}{2b^2}$.
Il en résulte $|2a^2 - b^2| < 1$ donc $2a^2 = b^2$ car a et b sont entiers.
Mais cela implique $\sqrt{2} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas. Ainsi : $\forall\, a, b \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{a}{b} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| > \frac{1}{4b^2}$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

L'application $x \mapsto P'(x) = 2ax + b$ est affine.
Pour prouver $|P'(x)| \leq 4$ sur $[-1, 1]$, il suffit donc de l'établir pour $x = -1$ et pour $x = 1$.
Tout revient à prouver $\begin{cases} |2a-b| \leq 4 \\ |2a+b| \leq 4 \end{cases}$. Mais $\begin{cases} P(-1) = a-b+c \\ P(0) = c \\ P(1) = a+b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{P(1)+P(-1)}{2} - P(0) \\ b = \frac{P(1)-P(-1)}{2} \end{cases}$
On en déduit $2a+b = \frac{3P(1)+P(-1)}{2} - 2P(0)$ et $2a-b = \frac{P(1)+3P(-1)}{2} - 2P(0)$.
On a $|P(-1)| \leq 1$, $|P(0)| \leq 1$ et $|P(1)| \leq 1$ par hypothèse.
On en déduit $\begin{cases} |2a+b| \leq \frac{3|P(1)|+|P(-1)|}{2} + 2\,|P(0)| \leq 4 \\ |2a-b| \leq \frac{|P(1)|+3|P(-1)|}{2} + 2\,|P(0)| \leq 4 \end{cases}$, ce qu'il fallait démontrer.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On note que pour tout x de $\mathbb{R}^-$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(k-x) = \dfrac{n(n+1)}{2} - (n+1)x$.

De même : $\forall\, x \geq n,\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(x-k) = (n+1)x - \dfrac{n(n+1)}{2}$.

L'application S_n est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

Ainsi le minimum de S_n est nécessairement atteint sur $[0, n]$.

Fixons x dans $[0, n[$ et soit $m = [x]$. On a $m \leq x < m+1$ donc $|x-k| = \begin{cases} x-k & \text{si } k \leq m \\ k-x & \text{si } k > m \end{cases}$

Ainsi $S_n(x) = \sum_{k=0}^{m}(x-k) + \sum_{k=m+1}^{n}(k-x) = \dfrac{n(n+1)}{2} - m(m+1) + (2m+1-n)x$

On en déduit que l'application S_n est :

- strictement décroissante sur $[m, m+1[$ si $m < \frac{1}{2}(n-1)$.
- constante sur $[m, m+1[$ si $m = \frac{1}{2}(n-1)$ (ce qui suppose que n soit impair.)
- strictement décroissante sur $[m, m+1[$ si $m > \frac{1}{2}(n-1)$.

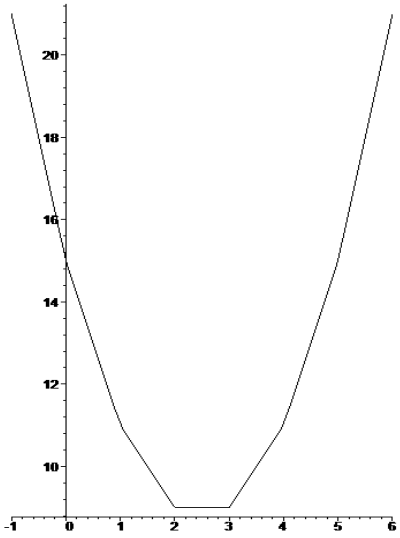
On distingue deux cas selon la parité de n :

- Si n est pair ($n = 2p$), S_n décroit strictement sur $[0, p]$ et croit strictement sur $[p, n]$.
  Le minimum de S_n est atteint en l'unique point $x = p$ et vaut $S_{2p}(p) = p^2 + p = \frac{1}{4}(n^2 + 2n)$.
- Si n est impair ($n = 2p+1$), l'application S_n est strictement décroissante sur $[0, p]$, constante sur $[p, p+1]$ et et elle est strictement croissante sur $[p, n]$.
  Sa valeur minimum est donc la valeur constante qu'elle prend sur l'intervalle $[p, p+1]$.
  Cette valeur est $S_{2p+1}(p) = (p+1)^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2$.

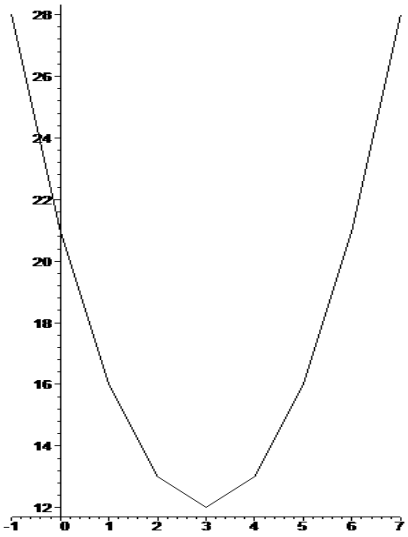
Les résultats précédents sont assez clairs lorsqu'on visualise la courbe représentative de S_n.
S_n est en effet affine par morceaux, convexe, et la droite $x = \dfrac{n}{2}$ est axe de symétrie vertical.
Voici d'ailleurs les courbes représentatives de S_4 et de S_5 :

```
> S:=(n::nonnegint)->(x->sum(abs(x-k),k=0..n));
```

```
> plot(S(5),-1..6,scaling=constrained);
```




```
> plot(S(6),-1..7,scaling=constrained);
```



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.