Un peu de géométrie du triangle

Le plan euclidien orienté est identifié à $\mathbb{C}$. Par exemple, si a est un nombre complexe, et plutôt que d'évoquer le point A d'affixe a, on parlera simplement du point a.

On va prouver des propriétés géométriques du triangle, invariantes dans toute similitude. On ne perd donc aucune généralité à considérer un triangle T inscrit dans le cercle unité $\mathcal{U} = \{z,\ |z| = 1\}$, c'est-à-dire défini par trois points distincts a, b, c tels que $|a| = |b| = |c| = 1$.

Uniquement pour les figures on prendra $a = \exp(-\frac{11i\pi}{12})$, $b = \exp(-\frac{i\pi}{12})$, et $c = \exp(\frac{5i\pi}{8})$.

I. La droite d'Euler

1. On pose $s = a + b$ et $h = a + b + c$. Montrer que $0, s, h, c$ forment un parallélogramme.
   En déduire que les hauteurs du triangle T se coupent au point h. [S]
2. Uniquement dans cette question, on suppose $a + b + c = 0$.
   Montrer que $ab + ac + bc = 0$ et en déduire que a, b, c sont les trois racines cubiques d'un même nombre complexe de module 1. Qu'en déduit-on concernant le triangle T ? [S]
3. Soit m l'équibarycentre de a, b, c.
   Montrer que les points $0, m, h$ sont alignés (et confondus $\Leftrightarrow$ T est équilatéral). [S]
4. Si T n'est pas équilatéral, la droite E contenant $0, m, h$ est appelée *droite d'Euler* de T.
   Montrer qu'alors : $z \in E \Leftrightarrow \overline{h}\, z - h\, \overline{z} = 0$ (c'est donc l'équation de E). [S]
5. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

II. Deux propriétés classiques de l'orthocentre

1. Identifier les symétriques de h par rapport aux milieux des cotés du triangle T et vérifier que ce sont éléments du cercle circonscrit $\mathcal{U}$. [S]
2. Montrer que la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite (ab) est l'application qui à tout point z associe le point $z' = -ab\,\overline{z} + a + b$.
   Caractériser de manière analogue la projection orthogonale sur la droite (ab). [S]
3. Prouver que les symétriques de h par rapport aux cotés de T sont sur $\mathcal{U}$. [S]
4. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

III. Le triangle orthique

On note α, β, γ les projetés respectifs du point h sur les droites $(bc), (ca), (ab)$ (c'est-à-dire les pieds des hauteurs au triangle T issues respectivement des sommets a, b, c.)

On dit que le triangle $H = \alpha\beta\gamma$ est le *triangle orthique* de T.

On supposera ici que le triangle T n'est pas rectangle, pour que α, β, γ soient distincts.

1. Montrer que $\alpha = \frac{1}{2}(h - \overline{a}bc)$ (utiliser (II.2)). Donner les expressions de β et γ. [S]
2. Déduire de ces expressions de α, β, γ que les droites $(0a)$, $(0b)$ et $(0c)$ sont respectivement orthogonales aux droites $(\beta\gamma)$, $(\alpha\gamma)$, et $(\alpha\beta)$. [S]

3. Montrer que la droite (γc) est bissectrice des droites $(\gamma\alpha)$ et $(\gamma\beta)$.
   Indication : pour établir $(\widehat{\gamma\alpha,\gamma c}) = (\widehat{\gamma c,\gamma\beta})\ [\pi]$, on utilisera en le justifiant le fait que a,γ,α,c sont cocycliques, ainsi que a,γ,h,β.
   En déduire que si les angles de T sont aigus, le triangle orthique est la trace d'un faisceau lumineux ou à la trajectoire d'une boule de billard ;-) inscrite dans le triangle T. [S]
4. Faire une figure reprenant les résultats de cette partie.

IV. Le cercle d'Euler, ou cercle des neuf points

On appelle *cercle d'Euler* du triangle T le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit aux milieux des cotés de T (et le triangle joignant ces trois points est appelé le *triangle médian* de T.)

1. Montrer que $\mathcal{C}$ a pour centre $k = \frac{1}{2}h$ et pour rayon $\frac{1}{2}$.
   Par quelle homothétie de rapport positif le cercle $\mathcal{C}$ se déduit-il de $\mathcal{U}$? [S]
2. Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ contient (outre les milieux des cotés de T.)
   (a) Les milieux des segments $[ha]$, $[hb]$ $[hc]$. [S]
   (b) Les points α,β,γ, pieds des hauteurs menées de a,b,c au triangle T. [S]
   Ces propriétés justifient que $\mathcal{C}$ soit appelé *cercle des neuf points du triangle* T.
3. Faire une figure montrant $\mathcal{U},T,\mathcal{C}$ et les trois triangles dont $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit.
4. Dans cette question, T est supposé non rectangle. Le point h est donc distinct de a,b,c.
   (a) Quels sont les orthocentres des triangles hab, hbc et hac ? [S]
   (b) En déduire que ces trois triangles on le même cercle d'Euler que le triangle T. [S]
   (c) Indiquer comment les cercles circonscrits à hab, hbc et hac se déduisent de $\mathcal{U}$. [S]
   (d) Montrer que le résultat de IV.4.c est aussi une conséquence de celui de II.3. [S]
   (e) Faire une figure illustrant le résultat de cette question.

V. Une propriété caractéristique du triangle orthique

Dans cette partie, on suppose que tous les angles du triangle T sont aigus.
On note u (resp. v, w) un point quelconque du segment $[ab]$ (resp. $[ac]$, $[bc]$).
Soit Δ le triangle de sommets u,v,w. Il est donc inscrit dans le triangle T.
On va montrer son périmètre $\psi(\Delta)$ est minimum quand Δ est le triangle orthique de T.

1. On note x (resp. y) le symétrique de u par rapport à la droite (ca) (resp. (cb)).
   Le segment $[xy]$ coupe le segment $[ac]$ en u' et le segment $[bc]$ en u''.
   (a) Montrer que si u est fixé, le périmètre de Δ est minimum quand $v = u'$ et $w = v'$. [S]
   (b) Montrer que la valeur de ce mimimun est $|b-a|\,|c-u|$. [S]
2. Comme dans les parties III et IV, on note α,β,γ les pieds des hauteurs au triangle T issues respectivement des sommets a,b,c.
   (a) Montrer que si $u=\alpha$, alors $u'=\beta$ et $u''=\gamma$. [S]
   (b) En déduire le triangle orthique est le triangle de périmètre minimum inscrit dans T. [S]