

Équations différentielles : quatre exercices indépendants

I. Une équation différentielle du premier ordre

On considère l'équation différentielle $(E) : x(x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = x$.

On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

On note $(H) : x(x^2 - 1)y'(x) + 2y(x) = 0$ l'équation homogène associée à (E) .

1. Préciser la nature de (E) , ainsi que le ou les intervalles I sur lesquels on va la résoudre. [S]
2. Donner la solution générale de (H) sur l'intervalle de résolution I . [S]
3. Donner la solution générale de (E) sur l'intervalle de résolution I . [S]
4. Déterminer les solutions de (E) , s'il en existe, sur l'intervalle $] -1, 1[$. [S]
5. Déterminer les solutions de (E) , s'il en existe, sur l'intervalle $] -\infty, 0[$. [S]
6. Déterminer les solutions de (E) , s'il en existe, sur l'intervalle $] 0, +\infty[$. [S]
7. L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ? [S]

II. Une équation différentielle du second ordre

On considère l'équation différentielle $(E_a) : y''(x) - (a + 1)y'(x) + ay(x) = d(x)$, où $a \in \mathbb{R}$, et où $x \mapsto d(x)$ est une application continue sur \mathbb{R} et à valeurs réelles.

On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

On note $(H_a) : y''(x) - (a + 1)y'(x) + ay(x) = 0$ l'équation homogène associée à (E_a) .

1. Préciser la nature de (E_a) , ainsi que le ou les intervalles I sur lesquels on va la résoudre.
Indiquer brièvement la forme que prend la solution générale de (E_a) sur I (notamment en fonction de la solution générale de (H_a) sur I). [S]
2. Donner la solution générale de l'équation homogène associée (H_a) sur I .
Dans cette question (comme dans la suivante) on discutera suivant les valeurs de a . [S]
3. Dans cette question, on pose $d(x) = xe^{a^2x}$ pour tout x de \mathbb{R} .
Donner la solution générale de (E_a) sur I . [S]
4. Dans cette question, on suppose $a = -1$ et on pose $d(x) = \text{th } x$ pour tout x de \mathbb{R} .
Donner la solution générale de (E_a) sur I . [S]
5. On considère l'équation différentielle $(E') : t^2 z''(t) + tz'(t) - z(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ où z est une fonction inconnue à valeurs réelles, définie sur un intervalle J .
On cherche à résoudre (E) sur $J = \mathbb{R}^{-*}$ ou sur $J = \mathbb{R}^{+*}$.
On pose le changement de variable $t = \varepsilon e^x$, où x parcourt \mathbb{R} et $\begin{cases} \varepsilon = -1 & \text{si } J = \mathbb{R}^{-*} \\ \varepsilon = 1 & \text{si } J = \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$
On définit ainsi une application $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $y(x) = z(t)$.
 - (a) Montrer que l'application $t \mapsto z(t)$ satisfait à (E') sur J si et seulement si l'application $x \mapsto y(x)$ satisfait sur \mathbb{R} à l'équation étudiée à la question précédente. [S]
 - (b) En déduire l'expression de la solution générale de (E') sur J . [S]
 - (c) L'équation (E') possède-t-elle des solutions sur \mathbb{R} tout entier?
On admettra que $\varphi : t \mapsto \frac{\arctan t}{t}$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et que $\varphi'(0) = 0$. [S]

III. Une équation fonctionnelle

On dira qu'une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution du problème \mathcal{P} si :

- L'application f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .
- Pour tous x, y de \mathbb{R} : $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ (E)

L'objet de cet exercice est de déterminer toutes les solutions du problème \mathcal{P} .

1. Déterminer les applications constantes qui sont solution du problème \mathcal{P} .
2. Dans cette question, soit f une solution *non constante* de \mathcal{P} . On pose $a = f''(0)$.
 - (a) Montrer que $f(0) = 1$.
 - (b) Montrer que $f'(0) = 0$.
 - (c) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} , on a $f''(x) = af(x)$.
Indication : dériver (E) par rapport à x (y fixé) et par rapport à y (x fixé).
3. Dédire de ce qui précède toutes les solutions du problème \mathcal{P} .

IV. Une équation différentielle avec "conditions initiales"

Soit $x \mapsto a(x)$ une application définie et continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles.

On dit qu'une application $x \mapsto y(x)$ est solution du problème \mathcal{P} si :

- L'application $x \mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$.
- Elle est solution de l'équation différentielle $y''(x) + a(x)y(x) = 0$ sur $[0, 1]$.
- Elle satisfait aux conditions $y(0) = y(1) = 0$.

1. Dans le cas où l'application $x \mapsto a(x)$ est constante ($a(x) = \lambda$ pour tout x de $[0, 1]$) montrer que la seule solution du problème \mathcal{P} est l'application nulle, sauf pour certaines valeurs de la constante λ , que l'on précisera.
2. Si $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue, on définit l'application $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \Phi(x) = (1-x) \int_0^x t \varphi(t) dt - x \int_1^x (1-t) \varphi(t) dt.$$
 - (a) Montrer que Φ est deux fois dérivable sur $[0, 1]$ et que (S) $\begin{cases} \forall x \in [0, 1], \Phi''(x) = -\varphi(x) \\ \Phi(0) = \Phi(1) = 0 \end{cases}$
 - (b) Réciproquement, soit $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur $[0, 1]$.
Montrer que si ψ est solution du système (S), alors $\psi(x) = \Phi(x)$ sur $[0, 1]$.
3. En déduire que l'application $x \mapsto y(x)$ est solution du problème \mathcal{P} si et seulement si :

$$(E) : \forall x \in [0, 1], y(x) = (1-x) \int_0^x t a(t) y(t) dt - x \int_1^x (1-t) a(t) y(t) dt.$$
4. Soit $x \mapsto y(x)$ une application continue sur $[0, 1]$.
On pose $m = \max_{[0,1]} |a(x)|$ et $M = \max_{[0,1]} |f(x)|$.
Montrer que si $x \mapsto y(x)$ vérifie (E) alors $|y(x)| \leq \frac{1}{8} m M$ pour tout x de $[0, 1]$.
5. En déduire que si $m < \frac{1}{8}$ alors la seule solution du problème \mathcal{P} est l'application nulle.