Équations différentielles : quatre exercices indépendants

I. Une équation différentielle du premier ordre

On considère l'équation différentielle $(E) : x(x^2-1)y'(x) + 2y(x) = x$.
On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On note $(H) : x(x^2-1)y'(x) + 2y(x) = 0$ l'équation homogène associée à (E).

1. Préciser la nature de (E), ainsi que le ou les intervalles I sur lesquels on va la résoudre. [S]
2. Donner la solution générale de (H) sur l'intervalle de résolution I. [S]
3. Donner la solution générale de (E) sur l'intervalle de résolution I. [S]
4. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]-1, 1[$. [S]
5. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]-\infty, 0[$. [S]
6. Déterminer les solutions de (E), s'il en existe, sur l'intervalle $]0, +\infty[$. [S]
7. L'équation (E) admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$? [S]

II. Une équation différentielle du second ordre

On considère l'équation différentielle $(E_a) : y''(x) - (a+1)y'(x) + ay(x) = d(x)$, où $a \in \mathbb{R}$, et où $x \mapsto d(x)$ est une application continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On en cherche les solutions $x \mapsto y(x)$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.
On note $(H_a) : y''(x) - (a+1)y'(x) + ay(x) = 0$ l'équation homogène associée à (E_a).

1. Préciser la nature de (E_a), ainsi que le ou les intervalles I sur lesquels on va la résoudre.
   Indiquer brièvement la forme que prend la solution générale de (E_a) sur I (notamment en fonction de la solution générale de (H_a) sur I). [S]
2. Donner la solution générale de l'équation homogène associée (H_a) sur I.
   Dans cette question (comme dans la suivante) on discutera suivant les valeurs de a. [S]
3. Dans cette question, on pose $d(x) = x\mathrm{e}^{a^2 x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   Donner la solution générale de (E_a) sur I. [S]
4. Dans cette question, on suppose $a = -1$ et on pose $d(x) = \operatorname{th} x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   Donner la solution générale de (E_a) sur I. [S]
5. On considère l'équation différentielle $(E') : t^2 z''(t) + tz'(t) - z(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ où z est une fonction inconnue à valeurs réelles, définie sur un intervalle J.
   On cherche à résoudre (E) sur $J = \mathbb{R}^{-*}$ ou sur $J = \mathbb{R}^{+*}$.
   On pose le changement de variable $t = \varepsilon\,\mathrm{e}^x$, où x parcourt $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \varepsilon = -1 & \text{si } J = \mathbb{R}^{-*} \\ \varepsilon = 1 & \text{si } J = \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$
   On définit ainsi une application $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $y(x) = z(t)$.
   (a) Montrer que l'application $t \mapsto z(t)$ satisfait à (E') sur J si et seulement si l'application $x \mapsto y(x)$ satisfait sur $\mathbb{R}$ à l'équation étudiée à la question précédente. [S]
   (b) En déduire l'expression de la solution générale de (E') sur J. [S]
   (c) L'équation (E') possède-t-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
   On admettra que $\varphi : t \mapsto \dfrac{\arctan t}{t}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(0) = 0$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

III. Une équation fonctionnelle

On dira qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si :
– L'application f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
– Pour tous x, y de $\mathbb{R}$: $\quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \qquad (E)$

L'objet de cet exercice est de déterminer toutes les solutions du problème $\mathcal{P}$.

1. Déterminer les applications constantes qui sont solution du problème $\mathcal{P}$.
2. Dans cette question, soit f une solution *non constante* de $\mathcal{P}$. On pose $a = f''(0)$.
   (a) Montrer que $f(0) = 1$.
   (b) Montrer que $f'(0) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = af(x)$.
   Indication : dériver (E) par rapport à x (y fixé) et par rapport à y (x fixé).
3. Déduire de ce qui précède toutes les solutions du problème $\mathcal{P}$.

IV. Une équation différentielle avec "conditions initiales"

Soit $x \mapsto a(x)$ une application définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles.
On dit qu'une application $x \mapsto y(x)$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si :
– L'application $x \mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $[0,1]$.
– Elle est solution de l'équation différentielle $y''(x) + a(x)y(x) = 0$ sur $[0,1]$.
– Elle satisfait aux conditions $y(0) = y(1) = 0$.

1. Dans le cas où l'application $x \mapsto a(x)$ est constante ($a(x) = \lambda$ pour tout x de $[0,1]$) montrer que la seule solution du problème $\mathcal{P}$ est l'application nulle, sauf pour certaines valeurs de la constante λ, que l'on précisera.
2. Si $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une application continue, on définit l'application $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :
   $\forall\, x \in [0,1],\ \Phi(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - x\int_1^x (1-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$
   (a) Montrer que Φ est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et que $(S)\begin{cases}\forall\, x \in [0,1],\ \Phi''(x) = -\varphi(x)\\ \Phi(0) = \Phi(1) = 0\end{cases}$
   (b) Réciproquement, soit $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable sur $[0,1]$.
   Montrer que si ψ est solution du système (S), alors $\psi(x) = \Phi(x)$ sur $[0,1]$.
3. En déduire que l'application $x \mapsto y(x)$ est solution du problème $\mathcal{P}$ si et seulement si :
   $(E) : \quad \forall\, x \in [0,1],\ y(x) = (1-x)\displaystyle\int_0^x t\,a(t)y(t)dt - x\int_1^x (1-t)a(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$
4. Soit $x \mapsto y(x)$ une application continue sur $[0,1]$.
   On pose $m = \max\limits_{[0,1]} |a(x)|$ et $M = \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$.
   Montrer que si $x \mapsto y(x)$ vérifie (E) alors $|y(x)| \leq \frac{1}{8}\,mM$ pour tout x de $[0,1]$.
5. En déduire que si $m < \frac{1}{8}$ alors la seule solution du problème $\mathcal{P}$ est l'application nulle.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.