Trajectoire d'une boule dans un billard circulaire

Le but de ce problème est d'étudier le mouvement d'une boule dans un billard circulaire.
Celui-ci est identifié au disque unité du plan complexe : $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\}$.
Le bord du billard s'identifie donc au cercle unité de centre O : $\Gamma = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

Une boule (assimilée à un point) est lancée depuis le point A_0 de Γ d'affixe -1 avec un vecteur vitesse initial d'affixe $e^{i\theta}$, avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Sa trajectoire $\mathcal{T}$ est une succession infinie de segments séparant les points de contact successifs avec Γ. On négligera les frottements, et les chocs de la boule sur Γ seront supposés *parfaits* (deux segments de la trajectoire séparés par un contact en un point A de Γ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la normale en A à Γ.)

On note $\mathcal{C}$ la couronne circulaire formée des points $M(z)$ tels que : $\sin\theta \leq |z| \leq 1$.

Première partie

1. Soit A_n le point où a lieu le n-ième choc de la boule sur le bord du billard.
   Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note a_n l'affixe du point A_n (par convention $a_0 = -1$).
   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $a_n = (-1)^{n+1}e^{2in\theta}$. [S]
2. Montrer que la trajectoire de la boule est incluse dans la couronne circulaire $\mathcal{C}$.
   Quelle est la longueur de chacun des segments composant cette trajectoire ? [S]
3. On suppose que le quotient $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel. Montrer que dans ce cas les points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts deux à deux (la trajectoire n'est donc pas fermée). [S]
4. On suppose que le quotient $\frac{\theta}{\pi}$ est un nombre rationnel, donc qu'il existe deux entiers positifs premiers entre eux p et q tels que $\theta = \frac{p}{q}\pi$.
   Montrer qu'alors la trajectoire $\mathcal{T}$ est fermée (le mouvement est périodique). [S]
5. Représenter $\mathcal{T}$ et calculer sa longueur lorsque $\theta = \frac{\pi}{12}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. [S]
6. Rappeler la méthode vue en cours pour calculer la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$ à l'aide de radicaux.
   Représenter $\mathcal{T}$ et donner sa longueur si θ est dans $\left\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right\}$. [S]

Deuxième partie

Pour tout a de $\mathbb{R}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ka,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
On dit qu'une partie G de $\mathbb{R}$ est un *sous-groupe additif* de $\mathbb{R}$ si : $\begin{cases} G \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in G^2,\ x - y \in G \end{cases}$

1. Soit G un sous-groupe additif (on pourra abréger en *sga*) de $\mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que 0 est dans G, et que $x \in G \Rightarrow -x \in G$. [S]
   (b) Montrer que pour tous x et y de G, alors $x + y$ est dans G. [S]
   (c) Établir que pour tout a de G alors $a\mathbb{Z}$ est inclus dans G. [S]
   (d) Montrer que pour tout a de $\mathbb{R}$, l'ensemble $a\mathbb{Z}$ est un *sga* de $\mathbb{R}$. [S]
2. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $G^+ = G \cap \mathbb{R}^{+*}$.

(a) Montrer que G^+ est non vide. Justifier l'existence de $a = \inf G^+$ dans $\mathbb{R}^+$. [S]

(b) On suppose ici que a est strictement positif.

i. Montrer que a est élément de G (indication : raisonner par l'absurde, considérer l'intervalle $]a, 2a[$ et utiliser la caractérisation de la borne inférieure). [S]

ii. Montrer que G est inclus dans $a\mathbb{Z}$ (indication : pour tout x de G, justifier l'existence d'un k de $\mathbb{Z}$ tel que $0 \le x - ka < a$). [S]

iii. En déduire que $G = a\mathbb{Z} = \{\ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, \ldots\}$ (G est dit *discret*). [S]

(c) Dans cette question, on suppose que a est nul.
Montrer que pour tous réels x, y avec $x < y$, il existe z dans G tel que $x < z < y$.
(Indication : utiliser, après avoir justifié son existence, un élément t de $G \cap]0, y-x[$).
Une récurrence immédiate montre que $]x, y[$ contient une infinité d'éléments de G.
On exprime cette situation en disant que G est *dense* dans $\mathbb{R}$.
Cette propriété n'est bien sûr pas vérifiée par les ensembles $a\mathbb{Z}$. On a donc prouvé que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit discrets, soit denses. [S]

Troisième partie

Dans cette partie, on suppose que le quotient $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel.

On va montrer que pour tout point B de la couronne $\mathcal{C}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point M de la trajectoire $\mathcal{T}$ tel que $d(B, M) < \varepsilon$ (autrement dit : tout point de $\mathcal{C}$ peut être approché d'aussi près qu'on le veut par la trajectoire de la boule de billard : on exprime cette situation en disant que la trajectoire $\mathcal{T}$ est *dense* dans la couronne $\mathcal{C}$.)

1. On note $\varphi = 2\theta + \pi$ et on pose $G = \{n\varphi + 2m\pi,\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$.

   (a) Montrer que G est un *sga* dense dans $\mathbb{R}$ (pour la densité, raisonner par l'absurde). [S]

   (b) Montrer que pour tout x de G, l'écriture $x = n\varphi + 2m\pi$ (m, n dans $\mathbb{Z}$) est unique. [S]

2. On note H le sous-ensemble de G défini par $H = \{n\varphi + 2m\pi,\ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$.
   On va montrer que H est encore une partie dense de $\mathbb{R}$ (au sens de la question II2c).
   Pour cela on se donne deux réels x, y avec $x < y$, et on pose $\delta = \frac{1}{3}(y - x)$.

   (a) Justifier l'existence d'un élément $g = n\varphi + 2m\pi$ de G dans $]x + \delta, y - \delta[$. [S]

   (b) Montrer qu'il existe un élément $h = n'\varphi + 2m'\pi$ de H dans $]-\delta, \delta\,[$, avec $n' \ge -n$.
   Indication : montrer qu'il existe une infinité de $\tilde{g} = \tilde{n}\varphi + 2\tilde{m}\pi$ dans $G \cap]-\delta, \delta\,[$ et que cela implique une infinité de valeurs possibles pour l'entier $\tilde{n}$. [S]

   (c) En déduire que H est dense dans $\mathbb{R}$ au sens de la question II2c. [S]

   (d) En déduire : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\,(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},\ |n\varphi + (2m+1)\pi - t| < \varepsilon$. [S]

3. (a) Montrer que pour tous réels x et y, on a $\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \le |x - y|$. [S]

   (b) Déduire de ce qui précède que pour tout point B de Γ, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n tel que $d(A_n, B) < \varepsilon$. [S]

4. Généraliser le résultat de la question précédente à un point B de la couronne $\mathcal{C}$.
   Indication : mener par B une tangente au cercle intérieur de $\mathcal{C}$ et appliquer le résultat précédent à un des points d'intersection de cette tangente avec Γ. [S]

NB : ce problème est inspiré de l'épreuve de Maths 2 du concours 1998 de l'École Polytechnique (option PC).