Une amélioration de la méthode du point moyen

Dans ce problème, a et b sont deux réels donnés, avec $a < b$. On note $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. On pourra noter Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé Oxy, et A, B, C les points de Γ d'abscisses respectives a, b, c.

1. Question de cours : rappeler en quoi consiste l'approximation de l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la méthode du trapèze, quelle est son interprétation géométrique, et quel est un majorant (en valeur absolue) de l'erreur commise dans cette approximation. [S]

2. (a) Montrer que pour tout x de $[a,b]$, $\quad |f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)| \leq \dfrac{M_2}{2}(x-c)^2$. [S]

   (b) En déduire $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(c)\right| \leq \dfrac{M_2}{24}(b-a)^3$.
   On appelle "règle du point-moyen" l'approximation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)f(c)$. [S]

   (c) Donner une interprétation géométrique de la règle du point-moyen.
   Déduire des questions (1) et (2) un encadrement de l'intégrale de f sur $[a,b]$ selon que l'application f est convexe ou concave sur ce segment. [S]

   (d) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout k de $\{0,\dots,n-1\}$ on note $c_k = a + \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b-a}{n}$.
   Majorer l'erreur (en valeur absolue) dans : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$. [S]

3. On pose $J(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(c) - \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a))$

   (a) Calculer $J(f)$ quand : $\quad a)\ f(x) \equiv 1 \quad b)\ f(x) \equiv x \quad c)\ f(x) \equiv x^2 \quad d)\ f(x) \equiv x^3$. [S]

   (b) En déduire $J(f)$ quand f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. [S]

4. Soit $g : I = [-\omega, \omega] \to \mathbb{R}$ une application impaire et de classe $\mathcal{C}^5$, avec $\omega > 0$ fixé.
   Soit N_5 un majorant de $\left|g^{(5)}(t)\right|$ sur I. Soit u un élément donné de I.

   (a) Calculer l'intégrale $K(u) = \displaystyle\int_0^u (u-t)^2(u^2+2ut-t^2)\,\mathrm{d}t$. [S]

   (b) Prouver l'égalité $g(u) = ug'(0) + \dfrac{u^3}{6}g^{(3)}(0) + \dfrac{1}{24}\displaystyle\int_0^u (u-t)^4 g^{(5)}\,\mathrm{d}t$. [S]

   (c) Etablir $g''(u) = ug^{(3)}(0) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^u (u-t)^2 g^{(5)}\,\mathrm{d}t$. [S]

   (d) En déduire que $\left|g(u) - ug'(0) - \dfrac{u^2}{6}g''(u)\right| \leq \dfrac{7N_5}{360}|u|^5$. [S]

5. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ et on note $M_4 = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.
   En posant $g(u) = \displaystyle\int_{c-u}^{c+u} f(x)\,\mathrm{d}x$ déduire de ce qui précède la majoration :
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(c) - \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b)-f'(a))\right| \leq \frac{7M_4}{5760}(b-a)^5$$
   Retrouver à cette occasion les résultats de la question (3). [S]

6. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout k de $\{0,\dots,n-1\}$ on note $c_k = a + \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b-a}{n}$.
   Donner une majoration de l'erreur (en valeur absolue) dans l'approximation :
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) + \frac{(b-a)^2}{24n^2}(f'(b)-f'(a))$. Any comment ? [S]

 ©EduKlub S.A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.