Une amélioration de la méthode du point moyen

Dans ce problème, a et b sont deux réels donnés, avec $a < b$. On note $c = \dfrac{a+b}{2}$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $M_2 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. On pourra noter Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé Oxy, et A, B, C les points de Γ d'abscisses respectives a, b, c.

1. Question de cours : rappeler en quoi consiste l'approximation de l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la méthode du trapèze, quelle est son interprétation géométrique, et quel est un majorant (en valeur absolue) de l'erreur commise dans cette approximation. [S]
2. (a) Montrer que pour tout x de $[a,b]$, $\quad |f(x) - f(c) - (x-c)f'(c)| \le \dfrac{M_2}{2}(x-c)^2$. [S]
   (b) En déduire $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(c)\right| \le \dfrac{M_2}{24}(b-a)^3$.
   On appelle "règle du point-moyen" l'approximation $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)f(c)$. [S]
   (c) Donner une interprétation géométrique de la règle du point-moyen.
   Déduire des questions (1) et (2) un encadrement de l'intégrale de f sur $[a,b]$ selon que l'application f est convexe ou concave sur ce segment. [S]
   (d) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout k de $\{0,\ldots,n-1\}$ on note $c_k = a + \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b-a}{n}$.
   Majorer l'erreur (en valeur absolue) dans : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$. [S]
3. On pose $J(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(c) - \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b) - f'(a))$
   (a) Calculer $J(f)$ quand : *a)* $f(x) \equiv 1$ *b)* $f(x) \equiv x$ *c)* $f(x) \equiv x^2$ *d)* $f(x) \equiv x^3$. [S]
   (b) En déduire $J(f)$ quand f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. [S]
4. Soit $g : I = [-\omega, \omega] \to \mathbb{R}$ une application impaire et de classe $\mathcal{C}^5$, avec $\omega > 0$ fixé.
   Soit N_5 un majorant de $\left|g^{(5)}(t)\right|$ sur I. Soit u un élément donné de I.
   (a) Calculer l'intégrale $K(u) = \displaystyle\int_0^u (u-t)^2(u^2+2ut-t^2)\,\mathrm{d}t$. [S]
   (b) Prouver l'égalité $g(u) = ug'(0) + \dfrac{u^3}{6}g^{(3)}(0) + \dfrac{1}{24}\displaystyle\int_0^u (u-t)^4 g^{(5)}\,\mathrm{d}t$. [S]
   (c) Etablir $g''(u) = ug^{(3)}(0) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^u (u-t)^2 g^{(5)}\,\mathrm{d}t$. [S]
   (d) En déduire que $\left|g(u) - ug'(0) - \dfrac{u^2}{6}g''(u)\right| \le \dfrac{7N_5}{360}\,|u|^5$. [S]
5. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$ et on note $M_4 = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.
   En posant $g(u) = \displaystyle\int_{c-u}^{c+u} f(x)\,\mathrm{d}x$ déduire de ce qui précède la majoration :
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(c) - \frac{(b-a)^2}{24}(f'(b)-f'(a))\right| \le \frac{7M_4}{5760}(b-a)^5$$
   Retrouver à cette occasion les résultats de la question (3). [S]
6. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout k de $\{0,\ldots,n-1\}$ on note $c_k = a + \left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b-a}{n}$.
   Donner une majoration de l'erreur (en valeur absolue) dans l'approximation :
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) + \frac{(b-a)^2}{24n^2}(f'(b)-f'(a))$. Any comment ? [S]