L'équation du troisième degré.

Le but du problème est la résolution de l'équation :

$$(\mathrm{E}_1) : \; ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \; a \neq 0$$

1. (a) Montrer qu'il existe h dans $\mathbb{C}$ tel que le changement de variable $y = x + h$ transforme l'équation (E_1) en une équation (E_2) : $y^3 + py + q = 0$, $(p,q) \in \mathbb{C}^2$. [S]

   (b) Que dire si $p = q = 0$? Dans la suite, on supposera $(p,q) \neq (0,0)$. [S]

2. On note t' une solution non nulle dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E_3) : $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$.
   Soit α une racine cubique de t'.
   On pose $y_0 = \alpha - \dfrac{p}{3\alpha}$, $y_1 = j\alpha - \dfrac{p}{3\alpha}j^2$, $y_2 = j^2\alpha - \dfrac{p}{3\alpha}j$.

   (a) Prouver $y_0 + y_1 + y_2 = 0$, $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = -2p$, et $y_0y_1 + y_0y_2 + y_1y_2 = p$. [S]

   (b) Montrer que $y_0y_1y_2 = -q$. [S]

   (c) En déduire que y_0, y_1, y_2 sont les solutions de (E_2) dans $\mathbb{C}$. [S]

   (d) Donner alors l'expression des solutions x_0, x_1, x_2 de (E_1) dans $\mathbb{C}$. [S]

3. On se place dans le cas particulier $q^2 + \dfrac{4p^3}{27} = 0$. Que dire de l'équation (E_3) ?
   Montrer qu'on peut choisir α tel que $\alpha^2 = -\dfrac{p}{3}$.
   Quelles solutions obtient-on alors pour l'équation (E_1) ? [S]

4. Dans cette question, on suppose que a, b, c, d sont réels. On pose $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

   (a) Si $\Delta > 0$ montrer que (E_1) a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. [S]

   (b) Si $\Delta < 0$, montrer que (E_1) a trois racines réelles. [S]

   (c) Si $\Delta = 0$, montrer que (E_1) a une racine réelle simple et une racine réelle double. [S]

5. On suppose que a, b, c, d sont réels, avec $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$.
   Montrer que $\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $r = \sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ et $\cos 3\theta = \dfrac{3q}{2p}\sqrt{-\dfrac{3}{p}}$.
   Si φ est tel que $\cos\varphi = \cos 3\theta$, donner les solutions de (E_1) en fonction de φ, p, a, b. [S]

6. (a) Trouver les solutions de $8x^3 - 12x^2 - 18x + 19 = 0$ à 10^{-3} près. [S]

   (b) Résoudre $8x^3 + 12x^2 - 18x + 5 = 0$. [S]

   (c) Résoudre $x^3 + 6x^2 + 10x + 8 = 0$. [S]

7. On suppose que p et q sont des nombres réels.
   En étudiant l'application $f : y \mapsto y^3 + py + q$, retrouver les résultats de la question (4), c'est-à-dire la nature des solutions de l'équation (E_2) en fonction du signe de $\Delta = 4p^3 + 27q^2$ (en revanche, on ne cherchera pas ici à retrouver l'expression de ces solutions.) [S]

Corrigé du Problème

1. (a) Avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d=0 &\Leftrightarrow a(y-h)^3+b(y-h)^2+c(y-h)+d=0\\ &\Leftrightarrow ay^3+(b-3ah)y^2+(c-2bh+3ah^2)y+d-ch+bh^2-ah^3=0\\ &\Leftrightarrow y^3+\Big(\frac{b}{a}-3h\Big)y^2+\Big(\frac{c-2bh}{a}+3h^2\Big)y+\frac{d-ch+bh^2}{a}-h^3=0\end{aligned}$$

On voit qu'il faut poser $h=\dfrac{b}{3a}$ pour éliminer le terme en y^2.

On a alors : $ax^3+bx^2+cx+d=0\Leftrightarrow y^3+py+q=0$, avec $y=x+h$, et $h=\dfrac{b}{3a}$.

Après calcul, $p=\dfrac{-b^2+3ca}{3a^2}$, et $q=\dfrac{2b^3+27da^2-9cba}{27a^3}$. [Q]

(b) Si $p=q=0$, $y=0$ est solution triple de l'équation (2).

Dans ce cas $x=-h=-\dfrac{b}{3a}$ est est solution triple de l'équation (E_1). [Q]

2. (a) Par hypothèse, α^3 vérifie (E_3), donc $\alpha^6+q\alpha^3-\dfrac{p^3}{27}=0$.

On remarque que $y_k=j^k\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}j^{2k}$, pour k dans $\{1,2,3\}$.

Tout d'abord $y_0+y_1+y_2=(1+j+j^2)\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}(1+j^2+j)=0$.

Ensuite, pour tout k dans $\{1,2,3\}$:

$y_k=j^k\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}j^{2k}\Rightarrow y_k^2=j^{2k}\alpha^2+\dfrac{p^2}{9\alpha^2}j^{4k}-\dfrac{2p}{3}j^{3k}=j^{2k}\alpha^2+\dfrac{p^2}{9\alpha^2}j^k-\dfrac{2p}{3}$.

On en déduit $y_0^2+y_1^2+y_2^2=(1+j+j^2)\Big(\alpha^2+\dfrac{p^2}{9\alpha^2}\Big)-2p=-2p$.

On remarque que $(y_0+y_1+y_2)^2-(y_0^2+y_1^2+y_2^2)=2(y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2)$.

Il en découle $y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2=p$. [Q]

(b) On trouve successivement :

$$\begin{aligned} y_0y_1y_2 &= \Big(\alpha-\frac{p}{3\alpha}\Big)\Big(j\alpha-\frac{p}{3\alpha}j^2\Big)\Big(j^2\alpha-\frac{p}{3\alpha}j\Big)=\Big(\alpha-\frac{p}{3\alpha}\Big)\Big(\alpha^2+\frac{p^2}{9\alpha^2}+\frac{p}{3}\Big)\\ &=\alpha^3+\frac{p^2}{9\alpha}+\frac{p\alpha}{3}-\frac{p\alpha}{3\alpha}-\frac{p^3}{27\alpha^3}-\frac{p^2}{9\alpha}=\alpha^3-\frac{p^3}{27\alpha^3}=-q\end{aligned}$$

Remarque : on a utilisé l'égalité $\alpha^6+q\alpha^3-\dfrac{p^3}{27}=0$, donc $\alpha^3-\dfrac{p^3}{27\alpha^3}=-q$. [Q]

(c) Notons $\sigma_1=y_0+y_1+y_2$, $\sigma_2=y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2$ et $\sigma_3=y_0y_1y_2$.

Pour tout y de $\mathbb{C}$, $(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)=y^3-\sigma_1y^2+\sigma_2y-\sigma_3=y^3+py+q$.

Conclusion : y_0,y_1,y_2 sont *les* solutions de l'équation (2). [Q]

(d) On en déduit une expression des solutions x_0,x_1,x_2 de (E_1) dans $\mathbb{C}$:

Pour tout k de $\{0,1,2\}$: $x_k=y_k-h=j^k\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}j^{2k}-\dfrac{b}{3a}$. [Q]