L'équation du troisième degré.

Le but du problème est la résolution de l'équation :

$$(\mathrm{E}_1) : \ ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad (a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4, \ a\neq 0$$

1. (a) Montrer qu'il existe h dans $\mathbb{C}$ tel que le changement de variable $y=x+h$ transforme l'équation (E_1) en une équation $(\mathrm{E}_2) : \ y^3+py+q=0, \ (p,q)\in\mathbb{C}^2$. [S]

   (b) Que dire si $p=q=0$? Dans la suite, on supposera $(p,q)\neq(0,0)$. [S]

2. On note t' une solution non nulle dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(\mathrm{E}_3) : t^2+qt-\dfrac{p^3}{27}=0$.
   Soit α une racine cubique de t'.
   On pose $y_0=\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}$, $y_1=j\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}j^2$, $y_2=j^2\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}j$.

   (a) Prouver $y_0+y_1+y_2=0$, $y_0^2+y_1^2+y_2^2=-2p$, et $y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2=p$. [S]

   (b) Montrer que $y_0y_1y_2=-q$. [S]

   (c) En déduire que y_0, y_1, y_2 sont les solutions de (E_2) dans $\mathbb{C}$. [S]

   (d) Donner alors l'expression des solutions x_0, x_1, x_2 de (E_1) dans $\mathbb{C}$. [S]

3. On se place dans le cas particulier $q^2+\dfrac{4p^3}{27}=0$. Que dire de l'équation (E_3) ?
   Montrer qu'on peut choisir α tel que $\alpha^2=-\dfrac{p}{3}$.
   Quelles solutions obtient-on alors pour l'équation (E_1) ? [S]

4. Dans cette question, on suppose que a, b, c, d sont réels. On pose $\Delta=4p^3+27q^2$.

   (a) Si $\Delta>0$ montrer que (E_1) a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. [S]

   (b) Si $\Delta<0$, montrer que (E_1) a trois racines réelles. [S]

   (c) Si $\Delta=0$, montrer que (E_1) a une racine réelle simple et une racine réelle double. [S]

5. On suppose que a, b, c, d sont réels, avec $\Delta=4p^3+27q^2<0$.
   Montrer que $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, avec $r=\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$ et $\cos 3\theta=\dfrac{3q}{2p}\sqrt{-\dfrac{3}{p}}$.
   Si φ est tel que $\cos\varphi=\cos 3\theta$, donner les solutions de (E_1) en fonction de φ, p, a, b. [S]

6. (a) Trouver les solutions de $8x^3-12x^2-18x+19=0$ à 10^{-3} près. [S]

   (b) Résoudre $8x^3+12x^2-18x+5=0$. [S]

   (c) Résoudre $x^3+6x^2+10x+8=0$. [S]

7. On suppose que p et q sont des nombres réels.
   En étudiant l'application $f : y\mapsto y^3+py+q$, retrouver les résultats de la question (4), c'est-à-dire la nature des solutions de l'équation (E_2) en fonction du signe de $\Delta=4p^3+27q^2$ (en revanche, on ne cherchera pas ici à retrouver l'expression de ces solutions.) [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Corrigé du Problème

1. (a) Avec les notations de l'énoncé :

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \Leftrightarrow a(y-h)^3+b(y-h)^2+c(y-h)+d=0$$
$$\Leftrightarrow ay^3+(b-3ah)y^2+(c-2bh+3ah^2)y+d-ch+bh^2-ah^3=0$$
$$\Leftrightarrow y^3+\Big(\frac{b}{a}-3h\Big)y^2+\Big(\frac{c-2bh}{a}+3h^2\Big)y+\frac{d-ch+bh^2}{a}-h^3=0$$

On voit qu'il faut poser $h=\dfrac{b}{3a}$ pour éliminer le terme en y^2.

On a alors : $ax^3+bx^2+cx+d=0 \Leftrightarrow y^3+py+q=0$, avec $y=x+h$, et $h=\dfrac{b}{3a}$.

Après calcul, $p=\dfrac{-b^2+3ca}{3a^2}$, et $q=\dfrac{2b^3+27da^2-9cba}{27a^3}$. [Q]

(b) Si $p=q=0$, $y=0$ est solution triple de l'équation (2).

Dans ce cas $x=-h=-\dfrac{b}{3a}$ est est solution triple de l'équation (E_1). [Q]

2. (a) Par hypothèse, α^3 vérifie (E_3), donc $\alpha^6+q\alpha^3-\dfrac{p^3}{27}=0$.

On remarque que $y_k=j^k\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}j^{2k}$, pour k dans $\{1,2,3\}$.

Tout d'abord $y_0+y_1+y_2=(1+j+j^2)\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}(1+j^2+j)=0$.

Ensuite, pour tout k dans $\{1,2,3\}$:

$$y_k=j^k\alpha-\frac{p}{3\alpha}j^{2k} \Rightarrow y_k^2=j^{2k}\alpha^2+\frac{p^2}{9\alpha^2}j^{4k}-\frac{2p}{3}j^{3k}=j^{2k}\alpha^2+\frac{p^2}{9\alpha^2}j^k-\frac{2p}{3}.$$

On en déduit $y_0^2+y_1^2+y_2^2=(1+j+j^2)\Big(\alpha^2+\dfrac{p^2}{9\alpha^2}\Big)-2p=-2p$.

On remarque que $(y_0+y_1+y_2)^2-(y_0^2+y_1^2+y_2^2)=2(y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2)$.

Il en découle $y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2=p$. [Q]

(b) On trouve successivement :

$$y_0y_1y_2 = \Big(\alpha-\frac{p}{3\alpha}\Big)\Big(j\alpha-\frac{p}{3\alpha}j^2\Big)\Big(j^2\alpha-\frac{p}{3\alpha}j\Big)=\Big(\alpha-\frac{p}{3\alpha}\Big)\Big(\alpha^2+\frac{p^2}{9\alpha^2}+\frac{p}{3}\Big)$$
$$=\alpha^3+\frac{p^2}{9\alpha}+\frac{p\alpha}{3}-\frac{p\alpha}{3\alpha}-\frac{p^3}{27\alpha^3}-\frac{p^2}{9\alpha}=\alpha^3-\frac{p^3}{27\alpha^3}=-q$$

Remarque : on a utilisé l'égalité $\alpha^6+q\alpha^3-\dfrac{p^3}{27}=0$, donc $\alpha^3-\dfrac{p^3}{27\alpha^3}=-q$. [Q]

(c) Notons $\sigma_1=y_0+y_1+y_2$, $\sigma_2=y_0y_1+y_0y_2+y_1y_2$ et $\sigma_3=y_0y_1y_2$.

Pour tout y de $\mathbb{C}$, $(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)=y^3-\sigma_1y^2+\sigma_2y-\sigma_3=y^3+py+q$.

Conclusion : y_0,y_1,y_2 sont *les* solutions de l'équation (2). [Q]

(d) On en déduit une expression des solutions x_0,x_1,x_2 de (E_1) dans $\mathbb{C}$:

Pour tout k de $\{0,1,2\}$: $x_k=y_k-h=j^k\alpha-\dfrac{p}{3\alpha}j^{2k}-\dfrac{b}{3a}$. [Q]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.