Homographies du demi-plan de Poincaré

Notations

- On note $P = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$. On dit que P est le *demi-plan de Poincaré*.
- Pour tout $u = (a, b, c, d)$ de $\mathbb{R}^4$, on pose $\delta(u) = ad - bc$.
- On note $E = \{u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ \delta(u) = 1\}$.
- Pour tout $u = (a, b, c, d)$ de E, on note h_u l'application définie sur P par $h_u(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.
  On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des applications h_u, pour tout u de E.

Première partie

Dans cette partie, on introduit une opération sur E et on en étudie quelques propriétés.
Pour tous $u = (a, b, c, d)$ et $v = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de E, on pose $u \otimes v = (a\alpha + b\gamma, a\beta + b\delta, c\alpha + d\gamma, c\beta + d\delta)$.

1. Montrer que $u \otimes v$ est encore un élément de E. Vérifier qu'en général $u \otimes v \neq v \otimes u$.
   Par ailleurs, on admet que : $\forall\, (u, v, w) \in E,\ u \otimes (v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. [S]
2. Montrer que $e = (1, 0, 0, 1)$ est dans E et vérifier que $u \otimes e = e \otimes u = u$.
   Dans toute la suite, pour tout $u = (a, b, c, d)$ de E, on note $u' = (d, -b, -c, a)$.
   Montrer que u' est dans E et que $u \otimes u' = u' \otimes u = e$. [S]
3. Pour tout u de E et tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u^0 = e$ et $u^{n+1} = u^n \otimes u$.
   Pour tout θ de $\mathbb{R}$, on pose $\begin{cases} r(\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta, \sin\theta, \cos\theta) \\ s(\theta) = (\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta, \operatorname{sh}\theta, \operatorname{ch}\theta) \end{cases}$
   (a) Pour tout réel θ, vérifier que $r(\theta)$ et $s(\theta)$ sont des éléments de E. [S]
   (b) Pour tous réels θ_1 et θ_2, calculer $r(\theta_1) \otimes r(\theta_2)$ et $s(\theta_1) \otimes s(\theta_2)$. [S]
   (c) Identifier $r(0), r(\theta)', s(0), s(\theta)'$ et calculer $r(\theta)^n$ et $s(\theta)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. [S]

Seconde partie

Dans cette partie, on étudie certaines propriétés des éléments h de $\mathcal{H}$.

1. Dans cette question, u et v sont des éléments quelconques de E.
   (a) Pour tout $u = (a, b, c, d)$ de E et tout z de P, montrer qu'on a $\operatorname{Im} h_u(z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz + d|^2}$.
   En déduire que h_u est une application de P dans P. [S]
   (b) Identifier h_e. Montrer qu'on a l'égalité $h_v \circ h_u = h_{v \otimes u}$. [S]
   (c) Montrer que h_u est une bijection de P sur P, et que $(h_u)^{-1} = h_{u'}$. [S]
2. (a) Pour tout u de E, vérifier que $h_u = \mathrm{id}_P$ si et seulement si $u = e$ ou $u = -e$. [S]
   (b) En déduire que, pour tout u, v de E, on a : $h_u = h_v \Leftrightarrow (u = v$ ou $u = -v)$. [S]
   (c) Déterminer les éléments h_u de $\mathcal{H}$ qui sont des involutions de P. [S]
3. (a) Dans cette question, on suppose que $u \neq \pm e$. Ainsi h_u n'est pas l'identité de P.
   Montrer que h_u a un point fixe dans P (il existe z dans P tel que $h_u(z) = z$) si et seulement si $|a + d| < 2$, et qu'alors ce point fixe est unique (on ne cherchera pas à l'expliciter.) [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

(b) Soit h_u une involution de P, distincte de l'identité (cf question II.2c).
Calculer le point fixe de h_u dans P, en fonction de $u = (a, b, c, d)$. [S]

(c) Préciser notamment les points fixes éventuels de h_u dans P si $u = r(\theta)$ ou $u = s(\theta)$. [S]

(d) Montrer finalement que les applications h de $\mathcal{H}$ telles que $h(i) = i$ sont exactement les applications h_u, avec $u = r(\theta)$, pour tout réel θ. [S]

Troisième partie

Pour simplifier, on note $f_\theta = h_{r(\theta)}$ et $g_t = h_{s(t)}$.
Ainsi, pour tous réels θ, t, et pour tout z de P, $f_\theta(z) = \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$ et $g_t(z) = \dfrac{z\,\mathrm{ch}\,t + \mathrm{sh}\,t}{z\,\mathrm{sh}\,t + \mathrm{ch}\,t}$.

Dans cette partie, on prouve que tout h de $\mathcal{H}$ est de manière unique la composée, dans cet ordre, d'une application f_θ, puis d'une application g_t, puis d'une homothétie $z \mapsto \lambda z$ de rapport $\lambda > 0$.

1. Indiquer pourquoi les applications $z \mapsto \lambda z$, avec $\lambda > 0$, sont dans $\mathcal{H}$. [S]
2. Préciser à quelle condition sur θ et φ on a $f_\theta = f_\varphi$. [S]
3. Soit $\omega = x + iy$ un élément de P.
Montrer qu'il existe un couple unique (t, λ) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\omega = \lambda\, g_t(i)$. [S]
4. Soit h un élément de $\mathcal{H}$.
Montrer qu'il existe un triplet unique (θ, λ, t) de $[0, \pi[\times\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda\, g_t \circ f_\theta$. [S]

Quatrième partie

On pose $F = E \cap \mathbb{Z}^4 = \{u = (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4,\ \delta(u) = ad - bc = 1\}$.
On note $\mathcal{K}$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}$ formé des applications h_u, quand u parcourt F.
Il est clair que pour tous u, v de F, $u \otimes v$ et u' sont encore dans F. Il en découle que le composé de deux éléments de $\mathcal{K}$ et que l'inverse d'un élément de $\mathcal{K}$ sont encore des éléments de $\mathcal{K}$.
Dans cette partie, ω est un élément fixé de P. On va s'intéresser aux images $h(\omega)$ de ω par les différentes applications h de $\mathcal{K}$, constater que la partie imaginaire des $h(\omega)$ passe par une valeur maximum, et vérifier que ce maximum est notamment atteint en un point $z = h(\omega)$ tel que $|z| \geq 1$ et $|\mathrm{Re}\, z| \leq \frac{1}{2}$.

1. (a) Prouver que $\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2,\ |c\omega + d| \leq 1\}$ est un ensemble fini. [S]
(b) En déduire que $\{\mathrm{Im}\, h(\omega),\ h \in \mathcal{K}\}$ possède un maximum $M(\omega)$, avec $M(\omega) \geq \mathrm{Im}\,\omega$. [S]
2. On reprend les notations de la question précédente.
En particulier, on désigne par k un élément de $\mathcal{K}$ tel que $\mathrm{Im}\, k(\omega) = M(\omega)$.
On note $\varphi = h_{(0,-1,1,0)}$ et $\tau = h_{(1,m,0,1)}$ (avec m dans $\mathbb{Z}$) qui sont toutes deux dans $\mathcal{K}$.
(a) En considérant $\varphi \circ k$, montrer que $|k(\omega)| \geq 1$. [S]
(b) En considérant $\tau \circ k$, montrer qu'il existe ℓ dans $\mathcal{K}$ tel que $\begin{cases} \mathrm{Im}\,\ell(\omega) = M(\omega) \\ \mathrm{Re}\,\ell(\omega) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \end{cases}$ [S]
(c) En déduire que $M(z)$ est supérieur ou égal à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Préciser le domaine du demi-plan P où se situe $\ell(\omega)$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.