

## Point de Fermat dans un triangle.

1. Soit  $M_1, M_2, \dots, M_n$  une famille de  $n$  points du plan complexe, d'affixes respectifs  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .  
Montrer que l'égalité  $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$  est réalisée si et seulement si les points  $M_1, M_2, \dots, M_n$  sont situés sur une même demi-droite issue de 0. [S]

2. On se donne  $n$  points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  d'affixes respectifs  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tous non nuls.

Pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , on pose  $\omega_k = \frac{a_k}{|a_k|}$  et on suppose que  $\sum_{k=1}^n \omega_k = 0$ .

Soit  $M$  un point quelconque du plan, d'affixe  $z$ .

(a) Montrer que la somme  $S = \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} (z - a_k)$  est indépendante de  $z$ , et que  $S < 0$ . [S]

(b) Prouver l'inégalité  $\sum_{k=1}^n |z - a_k| \geq \sum_{k=1}^n |a_k|$ . [S]

(c) Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si, pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , il existe  $\mu_k$  dans  $] -\infty, 1]$  tel que  $z = \mu_k a_k$ . [S]

(d) Interpréter géométriquement les conditions précédentes et en déduire, en fonction de la disposition des points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité

$$(E) : \sum_{k=1}^n |z - a_k| = \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Indication : on discutera suivant que les  $A_k$  sont alignés ou non avec  $O$ . On vérifiera que la condition d'alignement avec  $O$  n'est possible que si  $n$  est pair. [S]

3. (a) Soient  $P$  et  $Q$  deux points distincts du plan.

Identifier l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\widehat{\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}} = \frac{2\pi}{3}$  ( $2\pi$ ).

Indiquer comment construire cet ensemble à la règle et au compas. [S]

(b) Dans le plan, on se donne trois  $A_1, A_2, A_3$  non alignés. On suppose que la mesure de chaque angle intérieur au triangle  $A_1A_2A_3$  est inférieure à  $\frac{2\pi}{3}$ .

On appelle *point de Fermat* du triangle  $A_1A_2A_3$  le point  $O$  pour lequel la somme des distances  $OA_1 + OA_2 + OA_3$  est minimum.

Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité du point  $O$ , ainsi que sa construction à la règle et au compas.

Indication : on cherchera à se placer dans la situation décrite dans la question (2), et on montrera notamment que les points images de  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  forment un triangle équilatéral de centre  $O$  (d'ailleurs il sera commode, quitte à effectuer une rotation de centre  $O$ , de supposer que  $\omega_1$  est égal à 1.) [S]

## Corrigé du problème

1. La démonstration s'effectue par récurrence, à partir de  $n = 2$ .

– Montrons que la propriété est vraie au rang  $n = 2$ .

On se donne donc deux points  $M_1, M_2$  du plan, d'affixes respectifs  $z_1, z_2$ .

Le résultat est évident si  $z_1$  ou  $z_2$  est nul (c'est-à-dire si  $M_1$  ou  $M_2$  est à l'origine).

On peut donc supposer que ni  $z_1$  ni  $z_2$  ne sont nuls. Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \\ &\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = |z_1||z_2| \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}^*$ , on a  $\operatorname{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^{+*}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow z_1 \overline{z_2} \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \arg(z_1 \overline{z_2}) = 0 \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow \arg(z_1) + \arg(\overline{z_2}) = 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2 \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

et ce dernier résultat signifie que  $M_1$  et  $M_2$  sont sur une même demi-droite issue de 0.

– On suppose maintenant que la propriété est vraie au rang  $n \geq 2$ .

On se donne les  $n + 1$  points  $M_1, \dots, M_n, M_{n+1}$  d'affixes respectifs  $z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$ .

Soit  $M$  le point d'affixe  $Z = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ .

On a la double inégalité  $|Z + z_{n+1}| \leq |Z| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$ .

$$\text{Ainsi } |z_1 + \dots + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_{n+1}| \Leftrightarrow \begin{cases} |Z + z_{n+1}| = |Z| + |z_{n+1}| \\ |z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \end{cases}$$

La deuxième égalité équivaut à dire que  $M_1, \dots, M_n$  sont sur une même demi-droite  $\Delta$  issue de 0 (hypothèse de récurrence.) Bien entendu le point  $M$  figure lui aussi sur  $\Delta$ .

La première égalité équivaut à dire que  $M_{n+1}$  et  $M$  sont eux aussi sur une même demi-droite issue de 0, c'est-à-dire que  $M_{n+1}$  est lui aussi sur  $\Delta$ .

Cela prouve la propriété au rang  $n + 1$  et achève la récurrence. [Q]

$$2. \text{ (a) En développant : } S = z \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} - \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} a_k = z \underbrace{\sum_{k=1}^n \omega_k}_{=0} - \sum_{k=1}^n \frac{\overline{a_k} a_k}{|a_k|} = - \sum_{k=1}^n |a_k| < 0.$$

Ainsi  $S$  est indépendante de  $z$ , et  $S < 0$ . [Q]

$$\text{(b) On trouve } \sum_{k=1}^n |a_k| = -S = |S| = \left| \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} (z - a_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\overline{\omega_k} (z - a_k)|.$$

On sait que  $|\overline{\omega_k}| = 1$  pour tout  $k$ . On en déduit finalement :  $\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n |z - a_k|$ . [Q]

$$\text{(c) D'après la question (b), } \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n |z - a_k| \Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} (z - a_k) \right| = \sum_{k=1}^n |\overline{\omega_k} (z - a_k)|.$$

Ainsi les  $B_k$  d'affixe  $\overline{\omega_k} (z - a_k)$  sont sur une même demi-droite  $\Delta$  issue de 0.

Mais alors le point d'affixe  $S = \sum_{k=1}^n \overline{\omega_k} (z - a_k)$  est sur  $\Delta$ .

Il en résulte que  $\Delta$  est nécessairement la demi-droite des réels négatifs ou nuls.

$$\text{Ainsi } \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n |z - a_k| \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^-, \overline{\omega_k} (z - a_k) = \lambda_k.$$

$$\text{Mais } \overline{\omega_k} (z - a_k) = \lambda_k \Leftrightarrow z - a_k = \omega_k \lambda_k = \frac{a_k}{|a_k|} \lambda_k \Leftrightarrow z = \left(1 + \frac{\lambda_k}{|a_k|}\right) a_k.$$