Énigmes logiques

Problème

Naufragés sur la planète Golique, le capitaine Lagedu et son équipier Cogito découvrent six astronefs abandonnés. Par un raisonnement logique, ils trouvent lequel de ces appareils est paré à décoller.
Saurez-vous en faire autant ?

– Cogito : *Ces astronefs semblent en bon état.*
– Lagedu : *Ne vous y fiez pas, Cogito ! Depuis le temps, les moteurs doivent être hors-service ! !*
– Cogito : *Tout de même, capitaine, sur six appareils, il y en a sûrement un capable de décoller !*
– Lagedu : *Certes ! mais allez savoir lequel !*
– Cogito : *Il suffit de consulter pour chaque appareil ses deux ordinateurs de bord...*
– Lagedu : *Mais voyons ! Ces ordinateurs de bord aussi peuvent être déréglés ! Et vous savez qu'un ordinateur déréglé donne au moins une réponse fausse !*

Dans l'appareil n°1

– Ordinateur gauche : appareil n°1 paré à décoller ; ordinateur connexe hors service.
– Ordinateur droite : appareil n°1 paré à décoller ; ordinateur connexe fonctionne 5 sur 5.
– Lagedu : *Qu'est-ce que je vous disais ? Nous voilà bien avancés !*
– Cogito : *Il faut voir...*

Dans l'appareil n°2

– Ordinateur gauche : appareil n°2 paré à décoller ; ordinateurs connexes tous deux hors service.
– Ordinateur droite : ordinateur connexe fonctionne 5 sur 5.

Dans l'appareil n°3

– Ordinateur gauche : appareil n°3 paré à décoller ; au moins un des ordinateurs connexes hors service.
– Ordinateur droite : ordinateur connexe fonctionne 5 sur 5.

Dans l'appareil n°4

– Ordinateur gauche : appareil n°4 interdit de vol ; ordinateur connexe hors service.
– Ordinateur droite : appareil n°4 interdit de vol ; ordinateur connexe fonctionne 5 sur 5.

Dans l'appareil n°5

– Ordinateur gauche : appareil n°5 interdit de vol ; au moins un des ordinateurs connexes fonctionne 5 sur 5.
– Ordinateur droite : appareil n°5 paré à décoller ; ordinateurs connexes tous deux hors service.
– Lagedu : *Il n'y a rien à tirer de ces inepties, Cogito ! Vous perdez votre temps ! !*

Dans l'appareil n°6

– Ordinateur gauche : appareil n°6 paré à décoller ; ordinateurs connexes tous deux hors service.
– Ordinateur droite : appareil n°6 interdit de vol ; au moins un des ordinateurs connexes hors service.
– Lagedu : *Je vous l'avais bien dit : ces appareils n'ont pas été abandonnés sans raison, ils sont inutilisables !*
– Cogito : *Pas tous ! Venez, quittons ce coin perdu !*

Question 1

Voici un extrait de la solution parue dans « Jeux et Stratégies ».
Supposons que le premier astronef soit en état de marche (première supposition). Si l'ordinateur de gauche est en panne (deuxième supposition), il donne au moins une affirmation fausse. Sa première affirmation étant vraie (appareil paré à décoller), la deuxième est fausse, c'est-à-dire que l'ordinateur connexe fonctionne normalement : ce qu'il dit est vrai. Or, il affirme que l'ordinateur de gauche fonctionne bien. Il y a incompatibilité. Changeons donc notre deuxième supposition et posons à présent que l'ordinateur de gauche marche bien. S'il dit vrai, l'ordinateur de droite est déréglé et donne au moins une fausse indication. Or il affirme que l'appareil est prêt à décoller (ce qui est conforme à la première supposition) et que l'ordinateur de gauche fonctionne (ce qui est conforme à la deuxième). Il y a de nouveau incompatibilité. Quelle que soit donc notre deuxième supposition, nous avons abouti à une impossibilité : la première supposition est donc fausse et le premier astronef n'est pas en état de marche.

En vous inspirant de ce style, indiquez sur lequel des six astronefs se sont embarqués Lagedu et Cogito.

Question 2

On va formaliser un peu le problème précédent.
Pour chaque astronef, on note $\mathcal{P}$ la proposition « *l'appareil est prêt à décoller* ».
On note aussi $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{D}$) pour « *l'ordinateur de gauche (resp. de droite) fonctionne 5 et 5* ».
Traduire les données du problème à l'aide de ce formalisme, et répondre à la question.

Question 3

On va utiliser un formalisme plus efficace encore.
A toute proposition $\mathcal{A}$, on associe la *variable booléenne a* définie par $\begin{cases} a=1 & \text{si } \mathcal{A} \text{ est vraie} \\ a=0 & \text{si } \mathcal{A} \text{ est fausse} \end{cases}$

1. Soient a et b les variables associées à deux propositions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
   Avec ces notations, les propositions $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ et $a = b$ sont bien sûr synonymes.
   Quelles sont les variables associées aux propositions $\overline{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow B$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$?
2. Traduire les données du problème à l'aide de ce formalisme, et répondre à la question.

Question 4

Les habitants de la planète Olgique sont de deux types.
– Les « anciens » qui mentent le mardi, le mercredi, le jeudi, et qui disent la vérité les autres jours.
– Les « modernes » qui mentent le vendredi, samedi, dimanche, et qui disent la vérité les autres jours.

Dans un long voyage vers le temple de Vérisonge, vous rencontrez des anciens et des modernes, qui vous indiquent à leur manière quel jour on est dans la semaine.

– Le jour du départ, un moderne : *j'ai menti hier* ; un ancien : *j'ai menti hier.*
– Première étape, un ancien : *je mentais hier* ; un ancien : *je mentirai dans trois jours.*
– Deuxième étape, un moderne : *hier, je mentais* ; un ancien : *ce moderne ment.*
– A l'arrivée, un moderne : *je mentirai demain comme hier* ; un ancien : *on n'est pas vendredi.*

Précisez le jour de la semaine, pour chacune des quatre étapes.

Question 5

Le capitaine Lagedu et son équipier Cogito sont chargés d'enquêter sur différents braquages, commis (enfin on sait que les coupables sont parmi ces trois là) par Alfred, Baptiste et Charly. Ils n'ont à leur disposition que des indices détournés mais certains, fournis par les mutants visionnaires du puits de la vérité.

– Pour le hold-up de la bijouterie de Gemma : *Si Charly est innocent, Alfred est coupable. Si Alfred est coupable, il a agi avec un complice et un seul. Si Baptiste n'a pas trempé dans cette affaire, Charly non plus. S'il y a deux responsables dans cette affaire, Alfred est l'un d'eux.*

– Pour le casse de la banque de Prokur : *Si Baptiste a trempé dans cette affaire, Charly aussi. Pour les hold-up de banques, Alfred a horreur de faire équipe avec Charly. Si Alfred est coupable et Baptiste innocent, alors Charly est coupable. Charly n'a pas pu faire ce genre de boulot tout seul.*

– Pour le vol dans la pharmacie de Narcozia : *Si Alfred a trempé dans cette affaire, Baptiste non. Si Baptiste est coupable, il avait un complice et un seul. Si Charly est coupable, Alfred et Baptiste le sont aussi.*

Précisez le ou les coupables dans chacune de ces trois affaires.

Question 6

Les habitants de la planète Giloque sont de deux types.
Les « menteurs » mentent toujours, et les « changeants » parfois mentent et parfois disent la vérité.
Vous rencontrez quatre habitants X, Y, Z, T (dont au moins deux menteurs) de cette planète qui vous disent :

– X : de deux choses l'une, ou bien Y est changeant, ou bien T est changeant.
– Y : si je suis un menteur, X est un changeant.
– Z : ou bien je suis un menteur et Y est un changeant, ou bien je suis un changeant et Y est un menteur.
– T : ce problème n'était pas intéressant.

Ce problème était-il intéressant ?

Corrigé du problème

Question 1

- Pour l'appareil n°1 :

  Une solution a été donnée dans l'énoncé. Voici une autre rédaction possible : Supposons que l'ordinateur de droite fonctionne normalement. Ce qu'il dit est vrai, et notamment l'ordinateur de gauche fonctionne 5 sur 5. Ce que dit celui-ci est donc vrai, notamment au sujet de l'ordinateur de droite : mais c'est contradictoire. Donc l'ordinateur de droite est hors-service.

  Si l'appareil était prêt à décoller, alors tout ce que dit l'ordinateur de gauche serait vrai. Celui-ci fonctionnerait donc 5 sur 5, et tout ce que dirait l'ordinateur de droite (déréglé) serait vrai : c'est contradictoire.

  Autrement dit, l'appareil n°1 n'est pas paré à décoller.

- Pour l'appareil n°2 :

  Si l'ordinateur de gauche fonctionnait 5 sur 5, il ne déclarerait pas qu'il est déréglé (comme il le dit aussi de son voisin). L'ordinateur de gauche est donc déréglé, ce qui prouve que la phrase prononcée par l'ordinateur de droite est fausse. Celui-ci est donc également déréglé.

  Ainsi la deuxième partie de la phrase prononcée par l'ordinateur de gauche est vraie. Comme celui-ci est déréglé, c'est que la première partie de cette même phrase est fausse.

  Autrement dit, l'appareil n°2 n'est pas paré à décoller.

- Pour l'appareil n°3 :

  Si l'ordinateur de droite fonctionnait 5 sur 5, il dirait vrai en affirmant que l'ordinateur de gauche fonctionne lui aussi 5 sur 5 : la deuxième partie de la phrase prononcée par ce dernier serait donc fausse et il en résulterait une contradiction.

  Donc l'ordinateur de droite est déréglé, et la phrase qu'il prononce est fausse : l'ordinateur de gauche est déréglé. La deuxième partie de la phrase prononcée par ce dernier étant vraie, c'est que la première partie de cette même phrase est fausse. Autrement dit, l'appareil n°3 n'est pas paré à décoller.

- Pour l'appareil n°4 :

  Supposons que l'ordinateur de droite fonctionne 5 sur 5. D'après ses déclarations, on en déduit que l'ordinateur de gauche fonctionne aussi. Il en découle que l'ordinateur de droite est hors service : c'est contradictoire.

  Ainsi l'ordinateur de droite est déréglé.

  Dans ces conditions, supposons que l'ordinateur de gauche fonctionne 5 sur 5. Alors l'appareil est interdit de vol, et tout ce que déclare l'ordinateur de droite est exact : c'est absurde pour un ordinateur déréglé.

  L'ordinateur de gauche est donc lui aussi déréglé. Or la deuxième partie de sa déclaration est vraie. C'est que la première partie est fausse. Autrement dit, l'appareil n°4 est paré à décoller.

- Pour l'appareil n°5 :

  L'ordinateur de droite est déréglé, sinon il en résultait une contradiction manifeste avec la deuxième partie de la phrase qu'il prononce.

  Si l'ordinateur de gauche fonctionne 5 sur 5, alors l'apparail n°5 n'est pas paré à décoller.

  Supposons au contraire que l'ordinateur de gauche soit déréglé. Alors la deuxième partie de la phrase prononcée par l'ordinateur de droite est vraie. C'est nécessairement que la première partie est fausse.

  Autrement dit, l'appareil n°5 n'est pas paré à décoller.

  Remarque : contrairement aux questions précédentes, on voit qu'on peut conclure sans pour autant connaître l'état de fonctionnement d'un des deux ordinateurs. Celui de gauche peut fonctionner ou être déréglé : dans les deux cas, on trouve la réponse à la question posée.

- Pour l'appareil n°6 :

  L'ordinateur de gauche est déréglé, sinon il en résulterait une contradiction manifeste avec la deuxième partie de la phrase qu'il prononce.

  Supposons que l'appareil soit paré à décoller. Alors nécessairement la deuxième partie de ce que dit l'ordinateur de gauche est fausse. Il en résulte que l'ordinateur de droite fonctionne normalement, ce qui implique que l'appareil est interdit de vol : c'est contradictoire.

  Autrement dit, l'appareil n°6 n'est pas paré à décoller.

Question 2

Chaque ordinateur émet une assertion $\mathcal{A}$, consistant en un ou deux renseignements (séparés alors par un *et* logique, par exemple : *l'appareil n°1 est paré à décoller* **et** *l'ordinateur connexe est hors-service.*)

On nous dit qu'un ordinateur déréglé donne au moins un renseignement faux. Cela signifie tout simplement que la proposition $\mathcal{A}$ équivaut logiquement à la proposition $\mathcal{O}$: « l'ordinateur fonctionne 5 sur 5» .

- Pour l'appareil n°1 :
  La phrase prononcée par l'ordinateur de gauche peut se traduire par : $\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{D}}$.
  On a donc l'équivalence $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{D}})$.
  La phrase prononcée par l'ordinateur de droite se traduit par : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{G}$.
  On a donc l'équivalence $\mathcal{D} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\mathcal{G})$, et on doit résoudre le système (S) $\begin{cases} \mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \overline{\mathcal{D}}) \\ \mathcal{D} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{G}) \end{cases}$
  On a successivement :
  $$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } (\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\mathcal{G}})) \\ \mathcal{D} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{G}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{G} \Leftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ et } \overline{\mathcal{P}}) \text{ ou } (\mathcal{P} \text{ et } \overline{\mathcal{G}})) \\ \mathcal{D} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{G}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \overline{\mathcal{G}}) \\ \mathcal{D} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{G}) \end{cases}$$
  L'équivalence « $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{G}})$ » n'est possible que si la proposition $\mathcal{P}$ est fausse.
  Cela signifie que l'appareil n°1 n'est pas paré à décoller.
- Pour l'appareil n°2 :
  De ce que dit l'ordinateur de droite on tire l'équivalence : $\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{G}$.
  De ce que dit l'ordinateur de gauche on tire : $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ et $\overline{\mathcal{D}})$, donc : $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{G}})$.
  Cela n'est possible que si $\mathcal{P}$ est fausse : l'appareil n°2 n'est pas paré à décoller.
- Pour l'appareil n°3 :
  De ce que dit l'ordinateur de droite on tire l'équivalence : $\mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{G}$.
  De ce que dit l'ordinateur de gauche on tire : $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\overline{(\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{G})})$, donc : $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{G}})$.
  Cela n'est possible que si $\mathcal{P}$ est fausse : l'appareil n°3 n'est pas paré à décoller.
- Pour l'appareil n°4 :
  De ce que dit l'ordinateur de gauche on tire l'équivalence : $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{\mathcal{D}})$.
  De ce que dit l'ordinateur de droite on tire : $\mathcal{D} \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{G})$.
  Si $\mathcal{P}$ était fausse, on aurait $\begin{cases} \mathcal{G} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{D}} \\ \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathcal{G} \end{cases}$, ce qui est absurde.
  On en déduit que $\mathcal{P}$ est vraie : l'appareil n°4 est paré à décoller.
- Pour l'appareil n°5 :
  De ce que dit l'ordinateur de droite on tire l'équivalence : $\mathcal{D} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ et $\overline{\mathcal{G}})$.
  Cela implique nécessairement que la proposition $\mathcal{D}$ est fausse (par l'absurde.)
  Il en résulte que la proposition $(\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{G}})$ est fausse.
  De ce que dit l'ordinateur de gauche on tire l'équivalence : $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{P}}$ et $(\mathcal{G}$ ou $\mathcal{D}))$.
  Puisque $\mathcal{D}$ est fausse, cela se simplifie en : $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{G})$.
  Si $\mathcal{P}$ était vraie, $\mathcal{G}$ serait donc fausse, et $(\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{G}})$ serait vraie (et ce serait contradictoire.)
  On en déduit que $\mathcal{P}$ est fausse : l'appareil n°5 n'est pas paré à décoller.
- Pour l'appareil n°6 :
  De ce que dit l'ordinateur de gauche on tire l'équivalence : $\mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ et $\overline{\mathcal{D}})$.
  Cela implique nécessairement que la proposition $\mathcal{G}$ est fausse (par l'absurde.)
  Il en résulte que la proposition $(\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{D}})$ est fausse.
  De ce que dit l'ordinateur de droite on tire l'équivalence : $\mathcal{D} \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{P}}$ et $(\overline{\mathcal{D}}$ ou $\overline{\mathcal{G}}))$
  Puisque $\mathcal{G}$ est fausse, cela se simplifie en : $\mathcal{D} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{P}}$.
  Il en résulte que $(\mathcal{P}$ et $\overline{\mathcal{D}})$ est équivalente à $\mathcal{P}$.
  Cette dernière proposition est donc fausse : l'appareil n°6 n'est pas paré à décoller.

Question 3

1. – La variable associée à $\overline{\mathcal{A}}$ est bien sûr $1-a$.
   – Celle qui est associée à ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) est ab (elle vaut 1 si et seulement si a et b valent 1 toutes les deux.)
   – On sait que ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est équivalente à : $\overline{\overline{\mathcal{A}} \text{ et } \overline{\mathcal{B}}}$.
   La variable associée à ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est donc : $1-(1-a)(1-b) = a+b-ab$.
   – On sait que ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) est équivalente à ($\overline{\mathcal{A}}$ ou $\mathcal{B}$).
   La variable associée à ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) est donc : $(1-a)+b-(1-a)b = 1-a+ab$.
   – La proposition ($\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$) est équivalente à : ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) et ($\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$).
   La variable associée à ($\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$) est donc : $c = (1-a+ab)(1-b+ab)$.
   Sachant que $a^2 = a$ et $b^2 = b$, on trouve $c = (1-a)(1-b)+ab = 1-a-b+2ab$.
   On peut aussi écrire $c = 1-a^2-b^2+2ab = 1-(a-b)^2$.
   Il en résulte que $c = 1$ si et seulement si $a = b$, ce qui est rassurant.

2. Nous allons traduire par un système (S) les déclarations des ordinateurs de chaque appareil.
   On note p la variable associée à la proposition « *l'appareil est prêt à décoller* ».
   On note g (resp. d) les variables associées au bon fonctionnement de chaque ordinateur.
   – Pour l'appareil n°1 :
   Le système des deux équivalences (S) $\begin{cases} \mathcal{G} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \overline{\mathcal{D}}) \\ \mathcal{D} \Leftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{G}) \end{cases}$ s'écrit maintenant (Σ) : $\begin{cases} g = p(1-d) \\ d = pg \end{cases}$
   Ce sytème implique $d = p^2(1-d) = p(1-d)$, donc $p = 0$ (car $p = 1$ conduirait à $d = 1-d$.)
   Cela signifie que l'appareil n°1 n'est pas paré à décoller.
   – Pour l'appareil n°2 :
   On a $d = g$ et $g = p(1-d)(1-g)$, donc $g = p(1-g)^2 = p(1-g)$.
   Là encore, il est nécessaire que p soit nul : l'appareil n°2 n'est pas paré à décoller.
   – Pour l'appareil n°3 :
   On a $d = g$ et $g = p(1-dg)$ donc $g = p(1-g^2) = p(1-g)$.
   La conclusion est la même : l'appareil n°3 n'est pas paré à décoller.
   – Pour l'appareil n°4 :
   On a $g = (1-p)(1-d)$ et $d = (1-p)g$. On en déduit l'égalité $d = (1-p)(1-d)$.
   Celle-ci implique $p = 1$ (car $p = 0$ conduirait à $d = 1-d$.)
   Conclusion : l'appareil n°4 est paré à décoller.
   – Pour l'appareil n°5 :
   De ce que dit l'ordinateur de droite on tire : $d = p(1-d)(1-g)$, qui exige $d = 0$.
   Il en découle $0 = p(1-g)$ donc $p = 0$ ou $g = 1$.
   De ce que dit l'ordinateur de gauche on tire : $g = (1-p)(g+d-gd)$.
   Puisque $d = 0$, cela s'écrit $g = (1-p)g$, donc $pg = 0$.
   Les deux égalités $p(1-g) = 0$ et $pg = 0$ exigent $p = 0$.
   Conclusion : l'appareil n°5 n'est pas paré à décoller.
   – Pour l'appareil n°6 :
   De ce que dit l'ordinateur de gauche on tire : $g = p(1-d)(1-g)$, qui implique $g = 0$.
   De ce que dit l'ordinateur de droite on tire : $d = (1-p)(1-dg)$ donc $d = 1-p$.
   Dans ces conditions $g = p(1-d)(1-g)$ donne $0 = p(1-d)$ puis $0 = p^2 = p$.
   Conclusion : l'appareil n°6 n'est pas paré à décoller.

Question 4

Première méthode :
Pour résoudre cette question, on va utiliser un formalisme ensembliste. Celui-ci peut sembler un peu lourd au départ, mais c'est un investissement rentable et il devient rapidement très efficace.
Notons $\mathcal{W} = (Lu, Ma, Me, Je, Ve, Sa, Di)$ le 7-uplet des jours de la semaine.
Notons $\mathcal{M} = \{Ve, Sa, Di\}$ l'ensemble des jours où les modernes mentent.
Notons $\mathcal{A} = \{Ma, Me, Je\}$ l'ensemble des jours où les anciens mentent.
Si $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble de jours de la semaine, on notera $\mathcal{X}^+$ (resp. $\mathcal{X}^-$) l'ensemble obtenu par permutation circulaire d'une journée vers le futur (resp. vers le passé).

Si par exemple $\mathcal{X} = \{Lu, Sa, Di\}$, alors $\begin{cases} \mathcal{X}^+ = \{Ma, Di, Lu\} \\ \mathcal{X}^- = \{Di, Ve, Sa\} \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathcal{X}^{++} = \{Me, Lu, Ma\} \\ \mathcal{X}^{3-} = X^{4+} = \{Ve, Me, Je\} \end{cases}$

Pour une étape donnée, notons J le jour de la semaine, J^+ le lendemain, J^- la veille, etc.
Chaque moderne prononce une phrase qui (fausse ou vraie) décrit un sous-ensemble $\mathcal{X}$ des jours de la semaine.
De deux choses l'une : ou bien le moderne ment (autrement dit $J \in \mathcal{M}$) et alors J n'appartient pas à $\mathcal{X}$, ou bien il dit la vérité ($J \notin \mathcal{M}$) et alors J appartient à $\mathcal{X}$.
De ce que prétend ce moderne, on conclut donc que J appartient à l'ensemble $(\mathcal{M} \cap \overline{\mathcal{X}}) \cup (\overline{\mathcal{M}} \cap \mathcal{X}) = \mathcal{M} \Delta \mathcal{X}$ (c'est la définition de la *différence symétrique* Δ.)

De même, si la phrase prononcée par un ancien (qu'elle soit vraie ou fausse) décrit un sous-ensemble $\mathcal{X}$ de la semaine, alors de ce qu'il prétend on conclut que J appartient à $\mathcal{A} \Delta \mathcal{X}$.

– Le jour du départ :

  Le moderne prétend que J^- est dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire que J est dans $\mathcal{M}^+ = \{Sa, Di, Lu\}$.
  On en tire que J est dans $\mathcal{M} \Delta \mathcal{M}^+ = \{Ve, Lu\}$.
  L'ancien prétend que J^- est dans $\mathcal{A}$ donc que J est dans $\mathcal{A}^+ = \{Me, Je, Ve\}$.
  On en tire que J est dans $\mathcal{A} \Delta \mathcal{A}^+ = \{Ma, Ve\}$.
  Finalement J est dans $\{Ve, Lu\} \cap \{Ma, Ve\} = \{Ve\}$.
  Conclusion : le jour du départ est un vendredi.

– Première étape :

  De ce que prétend le premier ancien, on tire que J est dans $\{Ma, Ve\}$ (question précédente.)
  Le second ancien prétend J^{3+} est dans $\mathcal{A}$, donc J est dans $\mathcal{A}^{3-} = \{Sa, Di, Lu\}$.
  On en tire que J est dans $\mathcal{A} \Delta \{Sa, Di, Lu\} = \{Ma, Me, Je, Sa, Di, Lu\}$.
  On en déduit que J est dans $\{Ma, Ve\} \cap \{Ma, Me, Je, Sa, Di, Lu\} = \{Ma\}$.
  Conclusion : le jour de la première étape est un mardi.

– Deuxième étape :

  De ce que prétend le moderne, on tire que J est dans $\{Ve, Lu\}$ (voir «jour du départ»)
  L'ancien prétend que J est dans l'ensemble $\mathcal{M}$.
  On en tire que J est dans $\mathcal{A} \Delta \mathcal{M} = \{Ma, Me, Je, Ve, Sa, Di\}$.
  Finalement, J est dans $\{Ve, Lu\} \cap \{Ma, Me, Je, Ve, Sa, Di\} = \{Ve\}$.
  Conclusion : le jour de la seconde étape est un vendredi.

– A l'arrivée :

  Le moderne prétend que J est dans $\mathcal{M}^- \cap \mathcal{M}^+ = \{Sa\}$.
  On en tire que J est dans $\mathcal{M} \Delta \{Sa\} = \{Ve, Di\}$.
  L'ancien prétend que J est dans $\mathcal{X} = \{Lu, Ma, Me, Je, Sa, Di\}$.
  On en tire que J est dans $\mathcal{A} \Delta X = \{Lu, Sa, Di\}$.
  Finalement, J est dans $\{Ve, Di\} \cap \{Lu, Sa, Di\} = \{Di\}$.
  Conclusion : le jour d'arrivée est un dimanche.