Postulat de Bertrand

Notations

- On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
  Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_n = \mathbb{P} \cap [2, n]$ et $\pi(n) = \text{card}(\mathbb{P}_n)$.
  $\pi(n)$ désigne donc le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à n.
- Pour tout entier $n \geq 2$, et tout p de $\mathbb{P}$, on note $v_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N},\ p^k \mid n\}$.
  $v_p(n)$ est donc l'exposant de p dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers.
  On dit que $v_p(n)$ est la *valuation* de n suivant p.
  L'égalité $v_p(n) = k$ caractérise donc les entiers n divisibles par p^k mais pas par p^{k+1}.
- Pour tout $n \geq 2$, on note $E_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et $n\mathbb{N} = \{kn,\ k \in \mathbb{N}\}$.
- On note $[x]$ la partie entière de tout réel x.

L'objet de ce problème est de montrer le "postulat de Bertrand" :

Pour tout entier $n \geq 2$, il existe au moins un entier premier p tel que $n < p < 2n$.

Dans la suite du problème, n est un entier fixé quelconque, supérieur ou égal à 2.

Première partie

Dans cette partie et dans la suivante, p désigne un entier premier fixé quelconque.
On note m l'entier k maximum tel que $p^k \leq n$.

1. Donner une expression de m sous la forme d'une partie entière. [S]
2. Pour $1 \leq k \leq m$, calculer $\text{card}(E_n \cap p^k\mathbb{N})$ et $\text{card}\{j \in E_n,\ v_p(j) = k\}$. [S]
3. Justifier l'égalité $v_p(n!) = \sum_{j=2}^{n} v_p(j)$. [S]
4. En déduire finalement l'égalité $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{n}{p^k}\right]$. [S]

Deuxième partie

Dans cette partie, on étudie les valeurs possibles de la quantité $u_p(n) = v_p\left(\binom{2n}{n}\right)$.

1. Montrer que $u_p(n) = \sum_{k=1}^{m'} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$, avec $m' = \left[\frac{\ln(2n)}{\ln p}\right]$. [S]
2. Vérifier les propriétés suivantes :
   (a) $p^{u_p(n)} \leq 2n$. [S]
   (b) Si $\sqrt{2n} < p$, alors $u_p(n) \in \{0, 1\}$. [S]
   (c) Si $n \geq 3$ et $\frac{2}{3}n < p \leq n$, alors $u_p(n) = 0$. [S]
   (d) Si $n < p < 2n$, alors $u_p(n) = 1$. [S]

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Troisième partie

Cette partie est consacrée à la démonstration de résultats utiles dans la partie IV.

Pour tout réel $x \geq 2$, on note Π_x le produit des entiers premiers $p \leq x$.

1. Montrer que si $0 \leq k \leq 2n$ alors $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$. En déduire $\binom{2n}{n} \geq \dfrac{4^n}{2n}$. [S]

2. (a) Pour tout $m \geq 1$, montrer que $\Pi_{2m+1} \leq \binom{2m+1}{m}\Pi_{m+1} \leq 4^m \Pi_{m+1}$.

   Indication : montrer que tout p de $\mathbb{P}$ tel que $m+1 < p \leq 2m+1$ divise $\binom{2m+1}{m}$. [S]

   (b) En déduire que pour tout réel $x \geq 2$, on a $\Pi_x \leq 4^x$ (inégalité de Tchebyshev). [S]

3. Montrer que tous les diviseurs premiers de $\binom{2n}{n}$ sont strictement inférieurs à $2n$. [S]

Quatrième partie

Dans cette partie, on va prouver le postulat de Bertrand. On suppose, par l'absurde, l'existence d'un entier $n \geq 2$ tel que l'intervalle $]n, 2n[$ ne contienne aucun entier premier.

1. Montrer que l'entier n est nécessairement supérieur ou égal à 631.
   Indication : considérer les entiers premiers $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 13$, $p_5 = 23$, $p_6 = 43$, $p_7 = 83$, $p_8 = 163$, $p_9 = 317$, et $p_{10} = 631$. [S]

2. Montrer que l'hypothèse faite sur n permet d'écrire $\binom{2n}{n} = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{u_p(n)}$. [S]

3. Utiliser les parties II et III pour établir $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1}\, 4^{2n/3}$.

   Indication : $p \in \mathbb{P}_n \Rightarrow (p \leq \sqrt{2n})$ ou $(\sqrt{2n} < p \leq \dfrac{2n}{3})$ ou $(\dfrac{2n}{3} < p \leq n)$. [S]

4. En déduire que $4^{n/3} \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$, puis $\varphi(\sqrt{2n}) \geq \dfrac{\ln 2}{6}$ avec $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. [S]

5. Déduire que ce qui précède que n est inférieur à 450 et conclure. [S]

Contexte historique

Le "postulat de Bertrand" fut pour la première fois conjecturé en 1845 par Joseph Bertrand (1822-1900) qui le vérifia lui-même pour tous les nombres de l'intervalle $[2, 3{\cdot}10^6]$.

La première démonstration date de 1850 et est dûe à Chebyshev (1821-1894). Ainsi le postulat est-il aussi appelé théorème de Chebyshev.

Ramanujan (1887-1920) en donna une démonstration plus simple et Paul Erdös (1913-1996) publia en 1932 une preuve élémentaire utilisant les coefficients binomiaux (c'est de cette preuve qu'est inspirée le problème ci-dessus).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.